

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 8.02.2025

Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Pe o masă sunt cărți de joc care au 5 sau 7 puncte. Un elev alege la întâmplare cărți. Care este numărul minim, respectiv maxim de cărți pe care le poate alege până acumulează exact 2024 de puncte?

b) Dacă numerele naturale nenule x, y, z verifică relația $\frac{7x-3y}{4x+5y} = \frac{7y-3z}{4y+5z} = \frac{7z-3x}{4z+5x}$, arătați că $x = y = z$.

Soluție

a) Numărul minim de cărți se realizează când numărul cărților de 7 puncte este maxim

$$2024 = 7 \cdot 289 + 1 = 7 \cdot 287 + 5 \cdot 3 \dots\dots\dots 1p$$

Sunt 287 cărți de 7 puncte și 3 cărți de 5 puncte. În total, numărul minim de cărți este

$$287 + 3 = 290 \dots\dots\dots 1p$$

Numărul maxim de cărți se realizează când numărul cărților de 5 puncte este maxim

$$2024 = 5 \cdot 404 + 4 = 5 \cdot 402 + 7 \cdot 2 \dots\dots\dots 1p$$

Sunt 402 cărți de 5 puncte și 2 cărți de 7 puncte. În total, numărul maxim de cărți este

$$402 + 2 = 404 \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \frac{7x-3y}{4x+5y} = \frac{7y-3z}{4y+5z} = \frac{7z-3x}{4z+5x} = \frac{7x-3y+7y-3z+7z-3x}{4x+5y+4y+5z+4z+5x} = \frac{4}{9} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } \frac{7x-3y}{4x+5y} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = y \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } \frac{7y-3z}{4y+5z} = \frac{4}{9} \Rightarrow y = z \Rightarrow x = y = z \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 2

Fie numerele $a = 2n^3 - 6n^2 + 11$ și $b = 3n^3 - 9n^2 + 17$, unde n este un număr natural.

a) Arătați că numerele a și b sunt prime între ele;

b) Arătați că $\frac{2}{a} - \frac{3}{b} = \frac{1}{[a,b]}$, unde $[a,b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Soluție

a) Fie $d = (a, b)$.

$$d/a, d/b \Rightarrow d/2b, d/3a \dots\dots\dots 2p$$

$$d/(2b - 3a) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1 \dots\dots\dots 2p$$

b) $d = 1 \Rightarrow [a, b] = a \cdot b \dots\dots\dots 1p$

$$\frac{2}{a} - \frac{3}{b} = \frac{2b-3a}{a \cdot b} = \frac{1}{[a,b]} \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 3

Fie numerele prime a, b, c astfel încât $165a + 27b + 25c = 1 + 3 + 5 + \dots + 89$.

Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care numărul $n(a + b)(b + c)(c + a)$ este cub perfect.

Soluție

$$1 + 3 + 5 + \dots + 89 = 2025 \dots\dots\dots 2p$$

$$165a + 27b + 25c = 2025$$

$$27b : 5, (27, 5) = 1 \Rightarrow b : 5, b - \text{prim} \Rightarrow b = 5 \dots\dots\dots 1p$$

$$33a + 5c = 378 \Rightarrow 5c : 3, (5, 3) = 1 \Rightarrow c : 3, c - \text{prim} \Rightarrow c = 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 11 \dots\dots\dots 1p$$

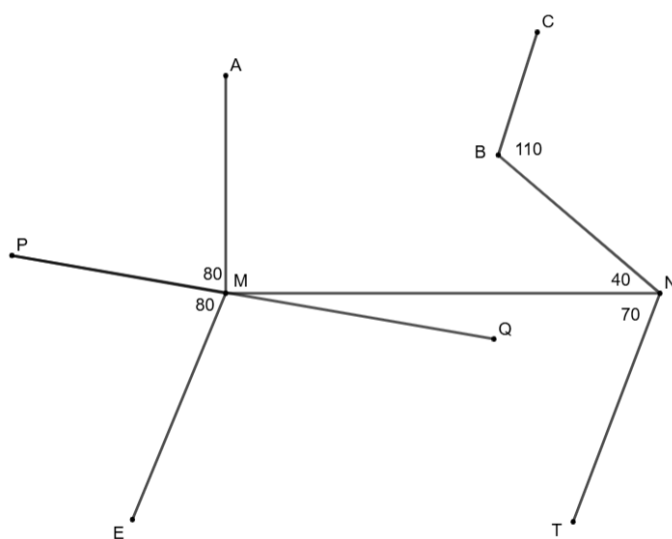
$$n(a + b)(b + c)(c + a) = n \cdot 2^8 \cdot 7 = \text{cub perfect} \dots\dots\dots 1p$$

$$n = 2 \cdot 7^2 = 98 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

Fie segmentul MN și punctul A situat pe perpendiculara în M pe MN . Punctele B și C se află în semiplanul determinat de punctul A și dreapta MN , iar punctul E este în semiplanul opus, astfel încât $\widehat{MNB} = 40^\circ$, $\widehat{NBC} = 110^\circ$ și $ME \parallel BC$. Să se afle măsura unghiului determinat de dreapta MN și semidreapta opusă bisectoarei unghiului \widehat{AME} .

Soluție



$$\text{Fie } NT \parallel ME \Rightarrow NT \parallel BC, BN - \text{secantă} \Rightarrow \widehat{BNT} = 110^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\widehat{MNT} = 70^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$NT \parallel ME, MN - \text{secantă} \Rightarrow \widehat{EMN} = 110^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\widehat{AME} = 360^\circ - (90^\circ + 110^\circ) = 160^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$MP - \text{bisectoare} \Rightarrow \widehat{PMA} = 80^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\widehat{QMN} = 180^\circ - (80^\circ + 90^\circ) = 10^\circ \dots\dots\dots 1p$$

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .