

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 8.02.2025

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

## SUBIECTUL 1

- i) Fie  $A = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}}$ . Arătați că  $A \in \mathbb{Q}$ .
- ii) Fie  $n = 1 + \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \dots + \sqrt{4049-2\sqrt{2024 \cdot 2025}}$ .
- a) Arătați că  $\sqrt{(2k+1)-2\sqrt{k(k+1)}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- b) Arătați că  $n \in \mathbb{N}$ .

## Soluție

- i)  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} - \frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}}$  .....1p
- Finalizare.....2p
- ii) a)  $\left( \sqrt{(2k+1)-2\sqrt{k(k+1)}} \right)^2 = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2$  .....1p
- $(2k+1) - 2\sqrt{k(k+1)} = k+1 - 2\sqrt{k(k+1)} + k$ .....1p
- b) Aplicând formula de la punctul a),  $n = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2025} - \sqrt{2024}$  .....1p
- $n = \sqrt{2025} = 45 \in \mathbb{N}$  .....1p

## SUBIECTUL 2

Determinați numerele întregi  $a, b, c, d$  pentru care  $a + b + c = 2d$  și  $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} = d^2$ .

Supliment G.M. 9/2024

## Soluție

$ab \geq 0, bc \geq 0, ac \geq 0 \Rightarrow a, b, c$  au același semn.

Dacă două dintre numerele  $a, b, c$  sunt nule  $\Rightarrow a = b = c = d = 0$ .....1p

Dacă  $a \neq 0 \Rightarrow b + c = 2d, \sqrt{bc} = d^2$ .

Vom considera cazul  $b > 0, c > 0$ .

Aplicând inegalitatea mediilor  $\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2} \Rightarrow d^2 \leq d$ . Cum  $d > 0 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow b = c = 1$ .

Analog pentru  $b=0$  și  $c=0 \Rightarrow$  obținem soluțiile  $(a, b, c, d)$

$\in \{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1)\}$ .....2p

Dacă  $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1 \Rightarrow d \geq 2$ .

Adunând inegalitățile  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2} \Rightarrow$

$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \leq a + b + c \Rightarrow d^2 \leq 2d$ . Cum  $d > 0 \Rightarrow d \leq 2 \Rightarrow d = 2$ .

$a + b + c = 4, a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1 \Rightarrow (a, b, c) \in \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ , care nu verifică (s-ar obține  $1 + 2\sqrt{2} = 4$ ....2p

Dacă  $a \leq 0, b \leq 0, c \leq 0 \Rightarrow d \leq 0$ . Notând  $x = -a, y = -b, z = -c, t = -d \Rightarrow x + y + z = 2t, \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = t^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \Rightarrow$

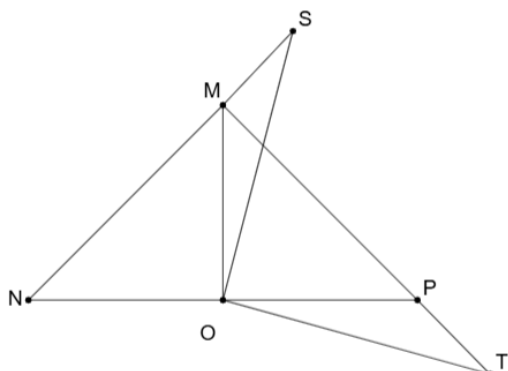
$(a, b, c, d) \in \{(0, -1, -1, -1), (-1, 0, -1, -1), (-1, -1, 0, -1)\}$ .....2p

### SUBIECTUL 3

Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel MNP, cu  $\angle M = 90^\circ$  și punctul O mijlocul laturii NP. Pe dreapta MN se consideră punctul S astfel încât M aparține segmentului NS. Perpendiculara în O, pe dreapta OS intersectează dreapta MP în punctul T.

- a) Arătați că triunghiul OTS este isoscel.  
b) Dacă  $MN=OT$ , determinați măsura unghiului OSM.

#### Soluție



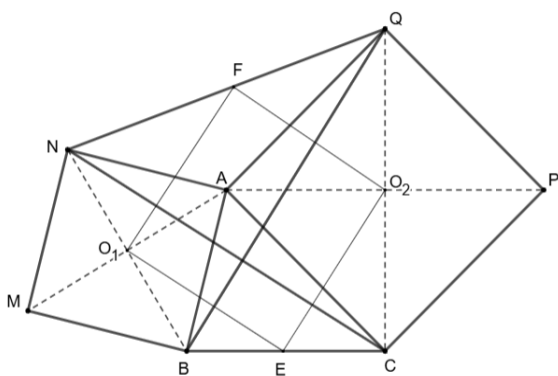
- a)  $OM=OP$ ,  $\angle OMS = \angle OPT = 135^\circ$ ,  $\angle MOS = \angle POT = 90^\circ - \angle POS$  .....2p  
 $\triangle MSO \equiv \triangle PTO$  (ULU)  $\Rightarrow OS = OT \Rightarrow \triangle OTS$  isoscel.....1p
- b) Fie  $OR \perp MN$ ,  $R \in MN$ .  $\triangle OMN$  dreptunghic isoscel, OR înălțime și mediană  $\Rightarrow OR = \frac{MN}{2}$ .....1p  
 $OS=OT=MN$ .....1p  
 $\triangle ORS$  dreptunghic,  $\angle ORS = 90^\circ$ ,  $OR = \frac{MN}{2} = \frac{OS}{2} \Rightarrow \angle OSR = 30^\circ$ .....2p

### SUBIECTUL 4

Pe laturile AB și AC ale triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc în exterior pătratele ABMN și ACPQ.

- a) Să se arate că  $\angle NCA = \angle BQA$ .  
b) Știind că E și F sunt mijloacele lui BC, respectiv NQ, să se arate că  $MP \perp EF$ .

#### Soluție



- a)  $\angle NAC = 90^\circ + \angle BAC$ ,  $\angle BAQ = 90^\circ + \angle BAC$  .....1p  
 $\triangle NAC \equiv \triangle BAQ$  (LUL)  $\Rightarrow \angle NCA = \angle BQA$ .....2p

- b) Fie  $MA \cap NB = \{O_1\}$ ,  $PA \cap QC = \{O_2\}$ .  
 $O_1$  mijloc AM și NB,  $O_2$  mijloc AP și QC  
 $O_1O_2$  linie mijlocie în  $\triangle MAP \Rightarrow O_1O_2 \parallel MP$ .....1p  
 $O_2E$  linie mijlocie în  $\triangle QBC \Rightarrow O_2E = \frac{BQ}{2}$ .  
 $O_2F$  linie mijlocie în  $\triangle NQC \Rightarrow O_2F = \frac{NC}{2}$ .

$$O_1E \text{ linie mijlocie în } \triangle NBC \Rightarrow O_1E = \frac{NC}{2}.$$

$$O_1F \text{ linie mijlocie în } \triangle NBQ \Rightarrow O_1F = \frac{BQ}{2}.$$

$$\text{Cum } NC=BQ \Rightarrow O_2F = FO_1 = O_1E = EO_2 \Rightarrow FO_1EO_2 \text{ romb}.....2p$$

$$FO_1EO_2 \text{ romb} \Rightarrow FE \perp O_1O_2 \text{ și } O_1O_2 \parallel MP \Rightarrow FE \perp MP.....1p$$

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.