
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**Etapă locală – Constanța, 08.02.2025****Clasa a X-a****SUBIECTUL 1**

Fie $a \in (-1, 1)$ și $z \in \mathbb{C}$. Arătați că $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z - a| \leq \frac{1-a}{2} \cdot |z+1| + \frac{1+a}{2} \cdot |z-1|$.

*Gazeta Matematică, nr. 10/2024***SUBIECTUL 2**

Fie $a = \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$.

a) Să se arate că $a^3 - 3a \in \mathbb{N}$.

b) Calculați $\log_a(3a+10) + \log_{3a+10} a + \log_a\left(a - \frac{3}{a}\right) + \log_{\frac{1}{a}}(a^2 - 3)$.

*Gheorghe Andrei***SUBIECTUL 3**

Fie $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x)f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}\}$ și $H(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$.

a) Arătați că există $g \in F$ și aflați $H(g)$.

b) Arătați că dacă $f \in F$ atunci f nu este surjectivă.

c) Fie $f \in F$. Arătați că f este injectivă dacă și numai dacă $H(f) = \{0\}$.

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O și rază 1 și G centrul său de greutate. Notăm cu M , N , P mijloacele segmentelor GA , GB respectiv GC . Să se arate că dacă $OM^2 + ON^2 + OP^2 = \frac{3}{4}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

*Cătălin Zîrnă***Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.