

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 08.02.2025

Clasa a XII-a

## SUBIECTUL 1

Fie mulțimea  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$  și  $\cdot$  operația de înmulțire a numerelor complexe.

- Arătați că  $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$  este monoid comutativ.
- Determinați elementele simetrizabile ale acestui monoid.

*Supliment Gazeta Matematică, nr. 9/2024*

## SUBIECTUL 2

Se consideră un grup  $(G, \cdot)$  cu proprietatea că ordinul oricărui element din  $G \setminus \{e\}$  este numărul natural  $p \geq 2$ .

- Să se arate că dacă  $a, b \in G$  și  $ab = ba$ , atunci  $a^n b^m = b^m a^n$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{Z}^*$ .
- Să se arate că  $p$  este număr prim.
- Să se arate că dacă  $x, y \in G \setminus \{e\}$  pentru care există  $i, j \in \mathbb{N}^*$ ,  $i < p$ ,  $j < p$  cu  $x^i y^j = y^j x^i$ , atunci  $xy = yx$ .

*Cristina Homencovschi*

## SUBIECTUL 3

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}$ , unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .

- Să se arate că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .
- Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

\*\*\*

## SUBIECTUL 4

Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe  $[0, 1]$ , derivabilă pe  $(0, 1)$  și cu  $f'$  mărginită pe  $(0, 1)$ .

Notăm  $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$ ,  $J_n = \int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

- Arătați că există  $M > 0$  astfel încât  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ ,  $\forall x, y \in [0, 1]$ .
- Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = f(0)$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = f(1)$ .

*Nelu Chichirim***Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.