

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 08.02.2025

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1

- a) Numerele reale pozitive a și b satisfac relația $2a + 3b + 15 = 6\sqrt{2a+1} + 4\sqrt{3b+1}$.

Calculați $(a - b - 4)^{2025}$.

- b) Fie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2024}$ numere reale astfel încât

$$\sqrt{x_1^2 - 2x_1 + 1^2} + \sqrt{x_2^2 - 4x_2 + 2^2} + \sqrt{x_3^2 - 6x_3 + 3^2} + \dots + \sqrt{x_{2024}^2 - 4048x_{2024} + 2024^2} \leq 0.$$

Calculați $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2024}) \cdot 2025^{-1}$.

SUBIECTUL 2

- a) Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c, d \in (0; \infty)$ are loc inegalitatea

$$(a + b + c + d) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16.$$

- b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

$$\frac{x^2-1}{2024} + \frac{x^2-2}{2023} + \frac{x^2-3}{2022} + \dots + \frac{x^2-2024}{1} = \frac{2024x^2}{2025}.$$

SUBIECTUL 3

Fie ABCD un tetraedru cu baza BCD triunghi echilateral, iar G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, respectiv ACD.

- a) Arătați că $G_1G_2 \parallel (BCD)$.

- b) Considerăm o dreaptă PQ, $P \in (CD)$ și $Q \in (BC)$ ce conține centrul bazei. Arătați că $AC \parallel (G_1PQ)$.

Supliment G.M. Nr.10/2024

SUBIECTUL 4

Fie ABCD un pătrat cu latura $AB = 2a, a > 0$. Pe planul pătratului se ridică, de aceeași parte a planului, perpendicularele $BE = a$ și $DF = a(2\sqrt{2} - 1)$.

- a) Fie $M \in (DB)$ astfel încât $MB = a$ și $N \in (BC)$ astfel încât $MN \parallel AC$.

Demonstrați că $ME \perp (FMN)$.

- b) Determinați lungimea segmentului BT, $T \in (ABC)$, știind că $TF + TE$ are valoare minimă.

Notă:

Time de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.