

9

Olimpiada Națională de Matematică  
Etapă locală, 8 februarie 2025

Clasa a IX-a

AG  
2025

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

## Subiectul I – soluție orientativă

Obține $[x] = \frac{4x-1}{2}$	2p
$[x] = k$ și $x = \frac{2k+1}{4}$	1p
$k \leq \frac{2k+1}{4} < k+1$	2p
Obține $k \in \{-1, 0\}$ și $x \in \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ .	2p

## Subiectul II – soluție orientativă

a) Fie O un punct în plan. Avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$	2p
$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC})$ , $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ și finalizare, ținând cont că $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$ .	2p
b) Trece la module în relația de la a)	2p
Finalizare	1p

## Subiectul III – soluție orientativă

a) Demonstrează inegalitatea	2p
b) Inegalitatea se mai poate scrie: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + a^2b + b^2c + c^2a \geq 6 + 2ab + 2ac + 2bc$ , care se poate scrie sub forma:	2p
$(a+b+c)^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 6 + 2ab + 2ac + 2bc$ .	1p
Ținând cont că $a+b+c=3$ , ultima inegalitate este echivalentă cu: $9 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 6 + 2ab + 2ac + 2bc$ care se reduce la: $3 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 2ab + 2ac + 2bc$ , echivalentă cu: $(b+a^2b) + (c+b^2c) + (a+c^2a) \geq 2ab + 2ac + 2bc$ (*)	1p
Cum $b+a^2b \geq 2ab$ și analogele, se obține (*). Deci inegalitatea din enunț a fost dovedită.	1p

#### Subiectul IV – soluție orientativă

Dacă M este centrul de greutate al triunghiului DEF, atunci:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{0} \quad (1)$$

2p

Presupunem  $D \in BC$ ,  $E \in AC$ ,  $F \in AB$  și notăm  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ .

Rotind vectorii  $\overrightarrow{MD}$ ,  $\overrightarrow{ME}$ ,  $\overrightarrow{MF}$  cu  $90^\circ$  în jurul punctului M, relația (1) este

echivalentă cu  $\frac{MD}{a} \overrightarrow{BC} + \frac{ME}{b} \overrightarrow{CA} + \frac{MF}{c} \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ . Cum  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

3p

rezultă  $\left(\frac{MF}{c} - \frac{MD}{a}\right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{MD}{a} - \frac{ME}{b}\right) \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Cum  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  sunt vectori

necoliniari, avem  $\frac{MD}{a} = \frac{ME}{b} = \frac{MF}{c}$  și de aici concluzia dorită.

2p

**Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător**