

10

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 8 februarie 2025

Clasa a X-a

AG
2025

Subiectul I

a) Demonstrați inegalitatea:

$$\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_{2025}} a_1 \geq 2025, \text{ unde } a_i \in (0; 1) \text{ sau } a_i > 1, (\forall) i \in \overline{1, n}.$$

4 puncte

b) Determinați (folosind eventual rezultatul de la punctul a) minimul expresiei

$$E(x_1, x_2, \dots, x_{2025}) = \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4} \right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log_{x_{2025}} \left(x_1 - \frac{1}{4} \right), \text{ unde}$$

 $x_1, x_2, \dots, x_{2025} \in \left(\frac{1}{4}; 1 \right)$ și precizați valorile variabilelor pentru care se realizează minimul expresiei.

3 puncte

Subiectul II

Rezolvați ecuația $x^{\log_2 \left(\frac{x}{98} \right)} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$

7 puncte

Subiectul III

a) Determinați $x \in [0; +\infty)$ pentru care $[x]^{\lg 3} + [x]^{\lg 4} + [x]^{\lg 5} = [x]^{\lg 6}$, unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a lui x .

4 puncte

b) Demonstrați că $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5$.

3 puncte

Subiectul IV

Fie $x = 1 + i\sqrt{3}$, $y = 1 - i\sqrt{3}$ și $z = 2$. Demonstrați că pentru orice număr prim p , $p > 3$ are loc egalitatea $x^p + y^p = z^p$.

7 puncte

Varianta 2

Notă:

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect se redactează pe foaie separată
și este notat cu punctaj întreg, de la 0 la 7 p.