

5

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etape locală, 8 februarie 2025**

**Clasa a V-a**

**AG**  
2025

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Subiectul I – soluție orientativă**

a) $x = \left[ 3^{61} : (3^2)^{30} + 5^{42} : 5^{40} \right] : 4 \cdot 3 - 3 = (3 + 25) : 4 \cdot 3 - 3 = 18$	<b>2p</b>
$y = 100 : \left[ 23 + 34 : (18^2 : 18 - 1) \right] \cdot 3 = 100 : (23 + 34 : 17) \cdot 3 = 12$	<b>1p</b>
$3^x = 3^{18} = (3^3)^6 = 27^6 > 25^6 = 5^{12} = 5^y$	<b>1p</b>
b) Următorii doi termeni din șir sunt: $2^7 = 128$ și $2^8 = 256$	<b>2p</b>
Termenul de pe poziția 2025 este $2^{2025} \Rightarrow u(2^{2025}) = 2$	<b>1p</b>

**Subiectul II – soluție orientativă**

Așezăm datele problemei în felul următor: 2 pixuri..... 3 caiete..... 13 lei 4 pixuri..... 1 caiet..... 11 lei   ·3	<b>2p</b>
2 pixuri..... 3 caiete..... 13 lei 12 pixuri..... 3 caiete..... 33 lei	<b>2p</b>
10 pixuri..... 20 lei	<b>1p</b>
1 pix costă $20 : 10 = 2$ lei, 1 caiet costă $11 - 8 = 3$ lei	<b>1p</b>
7 pixuri și 8 caiete costă $2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 38$ lei	<b>1p</b>

**Subiectul III – soluție orientativă**

a) Se arată că $a = 3^{48}$ și $b = 5^{24}$	<b>1p</b>
Se arată că $a \cdot b = 3^{48} \cdot 5^{24} = 9^{24} \cdot 5^{24} = 45^{24} = (45^2)^{12} = 2025^{12} \Rightarrow k = 12$	<b>1p</b>
b) $a \cdot b = 45^{24} = 45^{22} \cdot 45^2 = 45^{22} \cdot 2025 = 45^{22} \cdot (1600 + 400 + 25) = 45^{22} \cdot (40^2 + 20^2 + 5^2)$	<b>1p</b>
Obținem că $a \cdot b = (45^{11} \cdot 40)^2 + (45^{11} \cdot 20)^2 + (45^{11} \cdot 5)^2$	<b>1p</b>
c) Presupunem că $45^{24} = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_7^2$ , unde $c_1, c_2, \dots, c_7$ sunt numere naturale impare $\Rightarrow c_1^2, c_2^2, \dots, c_7^2$ dau restul 1 prin împărțirea la 4	<b>1p</b>
Atunci $c_1^2 = 4x_1 + 1, c_2^2 = 4x_2 + 1, \dots, c_7^2 = 4x_7 + 1$	<b>1p</b>
Obținem că $45^{24} = 4(x_1 + x_2 + \dots + x_7 + 1) + 3$ , adică $45^{24}$ nu este pătrat perfect, în contradicție cu faptul că $45^{24} = (45^{12})^2$ și care este pătrat perfect, deci presupunere falsă, astfel rezultă concluzia.	<b>1p</b>

**Subiectul IV – soluție orientativă**

Se scrie $a = b \cdot q + 3$ , cu $3 < b$ , $2 \cdot a = (3 \cdot b) \cdot p + 11$ , cu $11 < 3 \cdot b$ , unde $p$ și $q$ sunt numere naturale	2p
Cum $11 < 3 \cdot b$ și $3 < b$ , rezultă $b \geq 4$	1p
Dacă $b = 4$ , avem $a = 4 \cdot q + 3 \Rightarrow 2 \cdot a = 8 \cdot q + 6$ și cum $2 \cdot a = 12 \cdot p + 11$ , obținem, că $8 \cdot q + 6 = 12 \cdot p + 11$ , imposibil în mulțimea numerelor naturale	1p
Dacă $b = 5$ , avem $a = 5 \cdot q + 3 \Rightarrow 2 \cdot a = 10 \cdot q + 6$ și cum $2 \cdot a = 15 \cdot p + 11$ , obținem că $10 \cdot q + 6 = 15 \cdot p + 11 \Rightarrow 10 \cdot q = 5 \cdot (3 \cdot p + 1) \Rightarrow 2 \cdot q = 3 \cdot p + 1$	1p
Putem alege $p = 1 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow a = 13$ (asigură existența lui $a$ )	1p
Prin urmare, cel mai mic număr natural $b$ este egal cu 5	1p

**Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător**