

7

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 8 februarie 2025

Clasa a VII-a

AG
2025

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

Se consideră suma

$$S = \frac{1}{(1+2^{-1})(1+2^2)} + \frac{1}{(1+2^{-2})(1+2^3)} + \dots + \frac{1}{(1+2^{-2024})(1+2^{2025})}.$$

a) Demonstrați că $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{2025}}$.

b) Arătați că $[2025 \cdot S] < 675$, unde
[x] este partea întreagă a numărului real x.

Soluție:

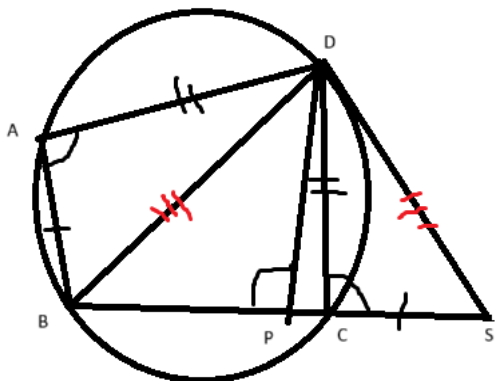
a) $\frac{1}{(1+2^{-k})(1+2^{k+1})} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^k})(1+2^{k+1})} = \frac{1}{1+2^{k+1}+\frac{1}{2^k}+\frac{2^{k+1}}{2^k}} = \frac{1}{1+2^{k+1}+\frac{1}{2^k}+2} =$	1p
$\frac{1}{3+2^{k+1}+\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\frac{3 \cdot 2^k + 2^k \cdot 2^{k+1} + 1}{2^k}} = \frac{2^k}{3 \cdot 2^k + 2^k \cdot 2^{k+1} + 1} = \frac{2^k}{2 \cdot 2^k + 2^k \cdot 2^{k+1} + 1 + 2^k} =$	1p
$= \frac{2^k}{2 \cdot 2^k + 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + 1 + 2^k} = \frac{2^k}{2 \cdot 2^k(1+2^k) + 1 + 2^k} = \frac{2^k}{(2 \cdot 2^k + 1)(1+2^k)}$	
$\frac{1}{(1+2^{-k})(1+2^{k+1})} = \frac{1}{1+2^k} - \frac{1}{1+2^{k+1}}$	1p
$S = \frac{1}{1+2^1} - \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+2^2} - \frac{1}{1+2^3} + \frac{1}{1+2^3} - \frac{1}{1+2^4} + \dots + \frac{1}{1+2^{2024}} - \frac{1}{1+2^{2025}}$	1p
$S = \frac{1}{1+2^1} - \frac{1}{1+2^{2025}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{2025}}$	
b) $2025 \cdot S = 2025 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{2025}} \right) = \frac{2025}{3} - \frac{2025}{1+2^{2025}}$	1p
$2025S = 675 - \frac{2025}{1+2^{2025}} < 675$	1p
$[2025 \cdot S] < 675$	1p

Subiectul II – soluție orientativă

Fie ABCD un patrulater inscriptibil cu AD=DC. Notăm cu P piciorul perpendicularei din D pe BC. Prelungim segmentul BC cu un segment CS=AB.

a) Demonstrați că triunghiul **BDS** – *isoscel*.

b) Să se arate că $AB+BC=2BP$.



a) Prelungim segmentul BC cu un segment CS=AB (1) ABCD- inscribibil => $\angle BAD \equiv \angle DCS$ (2)	2p
$AD \equiv DC$ (3) => $\triangle ABD \equiv \triangle CSD$ (L. U. L.) => => $BD \equiv DS$ => $\triangle BDS$ – <i>isoscel cu baza BS</i>	1p
b) $DP \perp BC$ => $DP \perp BS$ => DP-înălțime în $\triangle BDS$ – <i>isoscel</i>	1p
DP – mediana în $\triangle BDS$ – <i>isoscel</i> => BP=PS=> BS=2BP	1p
$\Rightarrow BS=BC+CS=BC+AB=AB+BC$ => $2BP=AB+BC$	1p

Subiectul III – soluție orientativă

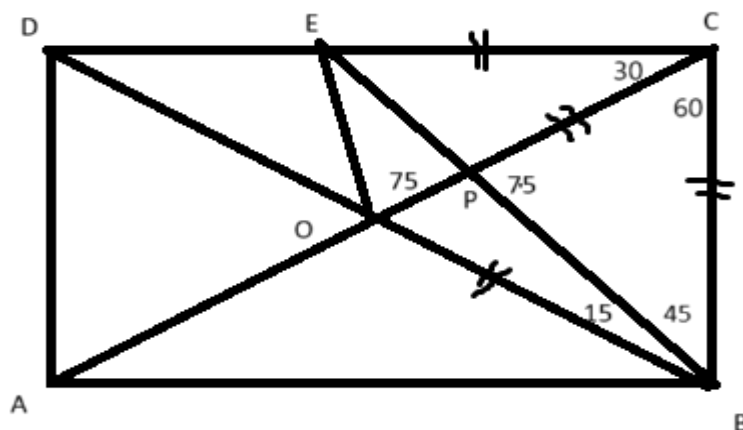
Fie $S_1 = \sqrt{1+3+5+7} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \sqrt{1+3+5+7+9+11} + \dots + \sqrt{1+3+5+7+9+11+13+\dots+2023}$.

- a) Determinați suma S_1 .
b) Aflați ultima cifră a sumei $S_2 = 1+3+5+7+9+11+13+\dots+2023$;

a) $\sqrt{1+3+5+7} = 4$ $\sqrt{1+3+5+7+9} = 5$ $\sqrt{1+3+5+7+9+11} = 6$	1p
$\sqrt{1+3+5+7+9+11+13+\dots+2023} = \sqrt{1012^2} = 1012$	1p
$S_1 = 4+5+6+\dots+1012 = (1+2+3+\dots+1012) - (1+2+3) =$ $= [1012(1012+1)]:2 - 6 =$ $= 506 \cdot 1013 - 6 = 512572$	2p
b) $S_2 = 1+3+5+7+9+11+13+\dots+2023 =$ $= (1+2+3+\dots+2023) - (2+4+6+\dots+2022) =$ $= [(2023(2023+1)):2 - 2(1+2+3+\dots+1011)] =$ $= (2023 \cdot 2024):2 - 2[1011(1011+1)]:2 =$ $= 2023 \cdot 1012 - 1011 \cdot 1012 =$ $1012(2023 - 1011) =$ $= 1012 \cdot 1012 =$ $= 1012^2$, deci S_2 este pătrat perfect, iar ultima cifră a sumei S_2 este 4.	1p

Subiectul IV – soluție orientativă

Fie ABCD un dreptunghi având $AB > BC$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și bisectoarea unghiului $\angle ABC$ și BD fac un unghi cu măsura egală cu 15° . Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează diagonala AC în punctul P și latura DC în punctul E. Arătați că $\triangle COE$ și $\triangle POE$ sunt triunghiuri isoscele.



$\triangle CEB$ - dreptunghic cu $\angle EBC = 45^\circ \Rightarrow$

1p

$$EC \equiv CB$$

1p

$\angle OBC = 60^\circ \Rightarrow \triangle OCB$ -echilateral cu $OC \equiv BC$

2p

$\Rightarrow \triangle COE$ – isoscel

1p

$\angle EOC = 75^\circ = \angle EPO \Rightarrow \triangle EPO$ -isoscel

2p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător