Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
clasa a VI-a

Timp de lucru 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Într-o şcoală de muzică sunt 45 de elevi. Dintre aceştia, 10 elevi studiază numai flautul, 29 elevi studiază vioara şi 18 elevi studiază pianul. Câţi elevi studiază şi pianul şi vioara?

A 11 **B** 16 **C** 21 **D** 6 **E** 12

R: E.

2. Într-un grup de elevi, raportul dintre numărul fetelor şi numărul băieţilor este $\frac{6}{5}$. Dacă numărul fetelor este cu 4 mai mare decât numărul băieţilor, aflaţi câţi elevi sunt în grup.

A 44 **B** 48 **C** 55 **D** 56 **E** 66

R: A.

3. Un obiect se scumpeşte cu 25%. Cu cât la sută ar trebui să se ieftinească, pentru a ajunge la preţul iniţial?

A 25% **B** 10% **C** 24% **D** 20% **E** 22%

R: D.

4. În interiorul unghiului $\angle AOB$ cu măsura de 75° este inclusă semidreapta OC, iar punctul D nu aparţine interiorului unghiului $\angle AOB$. Dacă măsura unghiului $\angle AOC$ este egală cu 30°, semidreapta OB este bisectoarea unghiului $\angle COD$, OE este semidreapta opusă semidreptei OA şi OF este semidreapta opusă semidreptei OD, atunci măsura unghiului $\angle EOF$ este egală cu:

A 75° **B** 90° **C** 120° **D** 135° **E** 45°

R: C.

5. În triunghiul ascuţitunghic ABC, punctul H este ortocentrul său. Dacă măsura unghiului $\angle BHC$ este 130°, iar $\frac{\angle ABC}{5} = \frac{\angle ACB}{8}$, atunci măsura unghiului $\angle ABC$ este:

A 40° **B** 50° **C** 90° **D** 80° **E** 130°

R: B.

6. La un concurs de matematică participă elevi din clasele a IV-a, a V-a şi a VI-a. Dacă 60% nu sunt în clasa a IV-a şi 65% nu sunt în clasa a V-a, atunci procentul elevilor de clasa a VI-a care participă la concurs este egal cu:

A 65% **B** 35% **C** 40% **D** 25% **E** 60%

R: D.

7. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $\angle BAC = 120^\circ$. Dacă $AP \perp BC$, punctul P aparţine laturii BC, $CQ \perp AB$ şi punctul Q aparţine dreptei AB, atunci măsura unghiului $\angle APQ$ este egală cu:

A 30° **B** 60° **C** 90° **D** 120° **E** 15°

R: A.

8. Care este cel mai mare număr natural n, pentru care 3^n divide numărul $19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 - 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$?

A 8 **B** 10 **C** 12 **D** 6 **E** 2

R: B.

9. Fie mulţimea $M = \left\{ \overline{abc} \mid \dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{a-b}{c-b}, a > b, c > b \right\}$. Numărul de elemente ale mulţimii M este:

A 36 **B** 126 **C** 45 **D** 117 **E** 153

R: D.

10. Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în grupe, astfel:

$$\underbrace{\{1\}}_{grupa\ 1}, \underbrace{\{3,5\}}_{grupa\ 2}, \underbrace{\{7,9,11\}}_{grupa\ 3}, \underbrace{\{13,15,17,19\}}_{grupa\ 4}, \ldots.$$

Grupa 100 începe cu numărul:

A 9901 **B** 101 **C** 4951 **D** 5051 **E** 10101

R: A.

11. Determinaţi numărul mulţimilor de patru elemente $\{a, b, c, d\}$, care sunt submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$ şi au proprietatea $a + b = c + d = 2021$.

A $2020 \cdot 2021$ **C** $1010 \cdot 2021$ **B** $1010 \cdot 1011$ **D** $1009 \cdot 1010$ **E** $505 \cdot 1009$

R: E.

12. Mulţimea A este inclusă în mulţimea numerelor întregi şi produsul elementelor sale este 330. Numărul maxim de elemente ale mulţimii A este egal cu:

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 11 **E** 22

R: C.

13. Pe segmentul AB se consideră punctele C şi D astfel încât $AC = CD = DB$. Dacă cercurile cu centrele în punctele C şi D şi lungimea razei egală cu $\dfrac{AB}{3}$ se intersectează în punctele E şi F, atunci măsura unghiului $\angle EAF$ este egală cu:

A $30°$ **B** $60°$ **C** $90°$ **D** $120°$ **E** $150°$

R: B.

14. Numerele naturale x, y, z sunt direct proporţionale cu numerele prime p, q, r. Dacă $p \cdot q \cdot r = 30$ şi $x + y + z = 100$, atunci suma ultimelor 2021 de cifre ale numărului $A = x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$ este egală cu:

A 2021 **B** 2020 **C** 6 **D** 4 **E** 2

R: E.

15. Câte perechi de numere întregi (n, k) au proprietatea $\dfrac{4}{n^2+2} = \dfrac{k^2}{51}$?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16

R: B.

16. Câte fracţii reductibile sunt în şirul $\dfrac{100}{1}, \dfrac{102}{3}, \dfrac{104}{5}, \dfrac{106}{7}, \ldots, \dfrac{160}{61}$?

A 10 **B** 12 **C** 13 **D** 9 **E** 14

R: B.

17. Ana îşi pregăteşte în fiecare dimineaţă o băutură miraculoasă în felul următor: toarnă într-un vas gradat, care are capacitatea de 350 ml, 100 ml de miere de albine, după care toarnă 200 ml de ceai, apoi completează cu 50 ml dintr-un lichid care este ingredientul secret şi amestecă. Într-o dimineaţă nu a fost atentă când a adăugat ceaiul şi a turnat până s-a umplut vasul, dar fără să verse pe jos. Care este cantitatea minimă de amestec ceai - miere care trebuie vărsată astfel ca, după ce va adăuga cantitatea de miere conţinută în amestecul aruncat, ceai şi 50 ml din ingredientul secret, să obţină 350 ml de băutură după reţeta stabilită?

A 50 ml **B** 55 ml **C** 65 ml **D** 70 ml **E** 75 ml

R: D.

18. Vom spune că un număr natural se numeşte *interesant* dacă suma pătratelor cifrelor sale este un pătrat perfect. Dacă N este cel mai mic număr interesant de 4 cifre distincte atunci:

A $N < 1010$ **B** $1010 \leq N < 2000$ **C** $2000 \leq N < 3000$ **D** $3000 \leq N < 4000$ **E** $N \geq 4000$

R: B

19. Fie mulţimea $A = \left\{(x, y) \mid \dfrac{x^2+y^2}{26} = \dfrac{x \cdot y}{[x, y]}, x, y \in \mathbb{N}^*\right\}$ unde $[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y. Numărul de elemente ale mulţimii A este:

A 2 **B** 6 **C** 3 **D** 4 **E** 5

R: E.

20. Dacă s este suma numerelor naturale nenule n cu proprietatea că numărul n^2 are exact n divizori numere naturale, atunci:

A $3 \leq s \leq 5$ **B** $5 < s \leq 10$ **C** $10 < s \leq 100$ **D** $100 < s \leq 1000$ **E** $s > 1000$

R: A.

21. O firmă intenţionează să construiască, de aceeaşi parte a unei străzi, 8 case care vor purta numerele $1, 2, 3, \ldots, 8$. Casele pot fi din cărămidă sau din lemn. Normele prevăd că se pot construi oricâte case din lemn, dar nu pot exista mai mult de trei case de lemn cu numere consecutive. Dacă n este numărul de variante pe care le are la dispoziţie firma de construcţii pentru a construi cele 8 case, atunci n este egal cu:

A 256 **B** 232 **C** 208 **D** 156 **E** 128

R: C.

22. Cel mai mare număr natural p pentru care există numerele naturale consecutive $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_p$ astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = 5^7$ este:

A 164 **B** 188 **C** 242 **D** 250 **E** 625

R: D.

23. Fie unghiul propriu $\angle AOB$ şi punctele M, N astfel încât M este în interiorul unghiului $\angle AOB$, iar N în exteriorul unghiului $\angle AOB$. Considerăm semidreapta OP, unde P aparţine interiorului unghiului $\angle AOM$, astfel încât măsurile unghiurilor $\angle AOP$ şi $\angle POM$ sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, iar $\angle POB = 60°$. Dacă $\angle BOM = 3 \cdot \angle BON$, iar OQ este bisectoarea unghiului $\angle AOP$, atunci măsura unghiului $\angle NOQ$ este:

A 110° **B** 120° **C** 100° **D** 90° **E** 80°

R: E

24. Dacă numărul natural n este divizibil cu 15 şi n^2 are exact 91 divizori naturali, atunci numărul divizorilor naturali ai lui n este:

A 18 **B** 41 **C** 40 **D** 28 **E** 13

R: D.