Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018
CLASA a VI-a
Varianta 2

Soluţii şi baremuri orientative

Problema 1. Numerele naturale x, y, z satisfac egalitatea

$$13x + 8y = 5z.$$

Demonstraţi că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ este divizibil cu 130.

Soluţie şi barem: Din egalitatea $13x + 8y = 5z$, obţinem $13x + 13y = 5z + 5y$, adică $13(x+y) = 5(z+y)$. Deoarece numerele 13 şi 5 sunt prime, obţinem că $(x+y)\,\vdots\,5$ şi $(y+z)\,\vdots\,13$. **4p**

Din ipoteză, obţinem $18x + 8y = 5z + 5x$, adică $5(z+x)\,\vdots\,2$, de unde $(z+x)\,\vdots\,2$. .. **2p**

Deoarece $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$, rezultă concluzia. **1p**

Problema 2. Un tablou de formă pătrată se împarte în 100 pătrăţele identice, distribuite pe 10 linii şi 10 coloane. Avem la dispoziţie 10 cartonaşe, numerotate diferit, cu cifre de la 0 la 9. Pe tablou trebuie să aşezăm două cartonaşe, având suma 10, în pătrăţele situate pe linii şi coloane diferite. Determinaţi numărul de posibilităţi de aşezare a acestor cartonaşe.

Soluţie şi barem: Deoarece suma cifrelor trebuie să fie egală cu 10, există doar 4 perechi de cartonaşe care se pot plasa pe tablou. **1p**

Primul cartonaş se poate plasa în orice pătrăţel, deci există 100 variante. Pentru al doilea cartonaş mai rămân 9 linii şi 9 coloane la dispoziţie, adică 81 de variante. Prin urmare avem $100 \times 81 = 8100$ variante de plasare a unei perechi de cartonaşe. **4p**

Deoarece avem 4 perechi, atunci avem în total $4 \times 8100 = 32400$ variante. **2p**

Problema 3. În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB < AC$, AD este înălţime, iar AE este bisectoare, unde $D, E \in (BC)$. În triunghiul ascuţitunghic $A'B'C'$, cu $A'B' < A'C'$, $A'D'$ este înălţime, iar $A'E'$ este bisectoare, unde $D', E' \in (B'C')$. Se ştie că $[AB] \equiv [A'B']$, $[AD] \equiv [A'D']$ şi $[AE] \equiv [A'E']$. Demonstraţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt congruente.

Soluţie şi barem: Deoarece $\triangle\ ABD \equiv \triangle\ A'B'D'$, conform cazului $C.I.$, obţinem $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$ $(*)$ şi $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle B'A'D'$. **3p**

Pe de altă parte, $\triangle\ DAE \equiv \triangle\ D'A'E'\ (C.I.)$, de unde $\measuredangle DAE \equiv \measuredangle D'A'E'$. **1p**

Suntem conduşi la $\measuredangle BAE \equiv \measuredangle B'A'E'$, de unde obţinem $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. **2p**

Ţinând cont de $(*)$, rezultă că $\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'$, conform cazului $U.L.U.$ **1p**

Problema 4. Lucia are în total 2018 bile galbene, albastre şi verzi. Numărul bilelor verzi este de 4 ori mai mare decât numărul bilelor albastre. La un *schimb*, Lucia oferă prietenei sale Cristina 13 bile galbene şi primeşte 5 bile albastre şi 7 bile verzi. După mai multe astfel de schimburi, Lucia rămâne fără bile galbene, dar cu 1271 bile verzi. Determinaţi numărul de bile galbene avute iniţial de Lucia?

Soluţie şi barem: Notăm cu k numărul de schimburi efectuate între cele două prietene. Atunci numărul de bile galbene este $13k$. **1p**

Numărul iniţial de bile albastre este $\dfrac{2018-13k}{5}$, iar numărul iniţial de bile verzi este $\dfrac{4\,(2018-13k)}{5}$. **2p**

Numărul final de bile verzi este $\dfrac{4\,(2018-13k)}{5}+7k=1271$,
de unde se obţine $k=101$. **3p**

Obţinem că Lucia a avut iniţial 1313 bile galbene. **1p**