Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021

Timp de lucru 120 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie $\overline{abc}$ cel mai mic număr natural format cu trei cifre distincte, pentru care pătratul unei cifre este egal cu suma pătratelor celorlalte două cifre. Atunci suma $a+b+c$ este egală cu:

A 12 **B** 8 **C** 16 **D** 19 **E** 14

R: A.

2. Dacă restul împărţirii numărului natural n la 9 este 7, iar restul împărţirii numărului natural n la 8 este 5, atunci restul împărţirii lui n la 72 este egal cu:

A 13 **B** 11 **C** 31 **D** 61 **E** 36

R: D

3. Câte numere naturale de patru cifre conţin cifrele 2 şi 3 alăturate, în această ordine?

A 280 **B** 279 **C** 300 **D** 243 **E** 100

R: B

4. Zece numere naturale consecutive se împart la 6 şi se adună resturile obţinute. Cea mai mare valoare posibilă a sumei acestor resturi este egală cu:

A 26 **B** 27 **C** 28 **D** 29 **E** 50

R: D

5. Ordinea crescătoare a numerelor $a=2^{85}$, $b=3^{51}$ şi $c=5^{34}$ este:

A $a<b<c$ **B** $a<c<b$ **C** $c<b<a$ **D** $b<a<c$ **E** $c<a<b$

R: C.

6. Numărul $N=10^{n+2}\cdot 13+2^{n+2}\cdot 5^{n+3}+2^{n+2}\cdot 5^{n+1}\cdot 11+10^{n}$, unde n este număr natural nenul, este divizibil cu:

A 2020 **B** 45 **C** 46 **D** 47 **E** 2022

R: D.

7. Se consideră numerele prime a şi b astfel încât $a+a^2+a^3+a^4+73b=2021$. Atunci $a+b$ este

A 44 **B** 28 **C** 26 **D** 22 **E** 20

R: D.

8. Dacă elevii unei clase se aşază câte doi într-o bancă, atunci rămân doi elevi în picioare, iar dacă se aşază câte trei elevi într-o bancă rămân trei bănci libere, iar într-o bancă stau doi elevi. Suma dintre numărul elevilor şi numărul băncilor din clasă este egală cu:

A 40 **B** 42 **C** 38 **D** 37 **E** 36

R: C.

9. Suma cifrelor numărului $N=9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{2021\text{ cifre}}$ este:

A 2043 **B** 2034 **C** 2022 **D** 2021 **E** 2020

R: A

10. Vom spune că un număr de forma $\overline{abc}$ este *simpatic* dacă cifrele a, b, c sunt (în această ordine) numere pare consecutive. Suma tuturor numerelor simpatice este egală cu:

A 700 **B** 2220 **C** 2640 **D** 1926 **E** 3542

R: C.

11. Vom spune că un număr natural A este *ciudat* dacă, scris în baza 10, are 20 de cifre, iar suma oricăror două cifre alăturate ale lui A este un număr impar. Numărul de numere ciudate este egal cu:
A 5^{20} **B** $2 \cdot 5^{20}$ **C** $2 \cdot 5^{20} - 1$ **D** $5^{20} - 5^{19}$ **E** $2 \cdot 5^{20} - 5^{19}$

R: E.

12. 7 creioane şi 5 pixuri costă 130 de lei, iar 8 creioane şi 7 pixuri costă 173 de lei. Cu cât ar trebui să se ieftinească un pix pentru a putea cumpăra, cu suma de 160 de lei, 5 creioane şi 9 pixuri?
A 3 **B** 4 **C** 2 **D** 6 **E** 1

R: B.

13. Se consideră toate cele 100 de numere naturale $A = 2^a + 5^b$, unde a şi b sunt cifre. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a unui număr A. Suma tuturor numerelor $u(A)$ este egală cu:
A 477 **B** 530 **C** 500 **D** 53 **E** 752

R: B.

14. Cifrele x şi y verifică relaţia $4^x \cdot 3^y = \overline{y30x}$. Atunci diferenţa numerelor x, y este egală cu:
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

R: B.

15. Numerele prime x, y şi z verifică relaţia $43x^2 + 129y + 10z = 1720$. Numărul $x + y + z$ este egal cu:
A 12 **B** 43 **C** 63 **D** 53 **E** 23

R: D.

16. Suma numerelor prime p şi q pentru care $p + q = 8p^2 - q^2$ este egală cu:
A 5 **B** 8 **C** 9 **D** 7 **E** 10

R: D.

17. Vom spune că un număr natural de patru cifre este *echilibrat* dacă prima sau ultima sa cifră este egală cu suma celorlalte cifre ale sale. Dacă $\overline{abcd}$ şi $\overline{abcd} + 1$ sunt numere echilibrate, atunci suma $a + d$ este egală cu:
A 15 **B** 10 **C** 11 **D** 13 **E** 14

R: E.

18. Se aşază în ordine crescătoare numerele naturale care se scriu numai cu cifrele 2 sau 7 (primele numere sunt $2, 7, 22, 27, 72, 77, 222, \ldots$). Suma cifrelor celui de-al 120-lea număr din şir este egală cu:
A 37 **B** 32 **C** 29 **D** 30 **E** 42

R: B.

19. Se consideră numărul $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{119}$. Cel mai mic număr natural compus, de trei cifre, care este divizor al lui S este egal cu:
A 101 **B** 111 **C** 105 **D** 123 **E**103

R: C.

20. Scriem toate numerele de patru cifre care se pot forma cu cifrele 1, 3, 4 şi 7 (un astfel de număr este, de exemplu, 3347). Împărţind fiecare dintre aceste numere la 3 obţinem un rest. Suma tuturor resturilor obţinute este
A 0 **B** 128 **C** 137 **D** 201 **E** 256

R: D

21. Pe o tablă sunt scrise numerele 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 14, 16 şi 17. O persoană A şterge nişte numere, iar o persoană B şterge alte numere astfel încât pe tablă rămâne un singur număr. Dacă suma numerelor şterse de A este jumătate din suma numerelor şterse de B, atunci pe tablă rămâne numărul
A 10 **B** 4 **C** 3 **D** 17 **E** 5

R: C.

22. Suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ pentru care $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$ este egală cu:

A 18 **B** 22 **C** 16 **D** 24 **E** 20

R: A.

23. Se consideră şirul $8^1 + 10^1$, $8^3 + 10^2$, $8^5 + 10^3, \ldots$, $8^{33} + 10^{17}$. Pentru fiecare termen din şir se calculează suma cifrelor, apoi suma cifrelor numărului obţinut şi tot aşa până când obţinem ca rezultat un număr de o singură cifră. Suma tuturor numerelor obţinute în acest mod este egală cu

A 2021 **B** 17 **C** 153 **D** 105 **E** 43

R: C.

24. Vom spune că un număr natural p este *special* dacă este prim şi există un număr natural nenul n şi numerele naturale prime x, y astfel încât $x > y$ şi $p = x^{2n} + y$. Numărul numerelor naturale speciale, mai mici ca 1000, este

A 5 **B** 4 **C** 3 **D** 2 **E** 1

R: D.