

OLIMPIADA LOCALĂ DE MATEMATICĂ
01.02.2020 - BAREM - CLASA A VIII - A

Problema 1

Se consideră numerele $a = \sqrt{4^{1010} - 2^{1011} + 1}$ și $b = \sqrt{4^{1011} + 2^{1013} - 2^{1012} + 1}$.

- a) Arătați că a este număr natural.
- b) Arătați că b este număr natural.
- c) Dacă S este suma numerelor naturale impare din intervalul (a,b) , arătați că $S < 3^{1347}$.

Barem – Problema 1

- a) $a = \sqrt{(2^{1010})^2 - 2 \cdot 2^{1010} + 1}$ 0,50p
 $a = \sqrt{(2^{1010} - 1)^2}$ 0,75p
 $a = 2^{1010} - 1 \in N$ 0,25p
- b) $b = \sqrt{(2^{1011})^2 + 2 \cdot 2^{1011} + 1} =$ 1p
 $b = \sqrt{(2^{1011} + 1)^2}$ 0,75p
 $b = 2^{1011} + 1 \in N$ 0,25p
- c) $S = (2^{1010} + 1) + (2^{1010} + 3) + (2^{1010} + 5) + \dots + (2^{1010} + 2^{1010} - 1)$ 0,25p
 $S = 2^{1009} \cdot 2^{1010} + (1 + 3 + 5 + \dots + 2^{1010} - 1)$ 0,75p
 $S = 2^{1009} \cdot 2^{1010} + 2^{1009} \cdot 2^{1009}$ 1p
 $S = 2^{2019} + 2^{2018}$ 0,25p
 $2^{2019} = (2^3)^{673} = 8^{673} < 9^{673} = (3^2)^{673} = 3^{1346}$ 1p
Din $\left. \begin{matrix} 2^{2019} < 3^{1346} \\ 2^{2018} < 3^{1346} \end{matrix} \right\} \Rightarrow S < 3 \cdot 3^{1346} = 3^{1347}$ 0,25p

Problema 2

- a) Fie $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Calculați valoarea expresiei $E(x) = \sqrt{x(x-2)+1} + \sqrt{x(x+1)+\frac{1}{4}}$;
b) Arătați că $(3a^2 + 5)(3b^2 + 5) \geq 60ab, \forall a, b \in R$;
c) Demonstrați că $16x^4 + 3 \geq 8x, \forall x \in R$.

Barem – Problema 2

a) $E(x) = \sqrt{x(x-2)+1} + \sqrt{x(x+1)+\frac{1}{4}} = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2} \dots\dots\dots 0,50p$

$E(x) = |x-1| + \left|\frac{2x+1}{2}\right| \dots\dots\dots 0,50p$

Din $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow |x-1| = 1-x$ și $\left|\frac{2x+1}{2}\right| = \frac{2x+1}{2} \dots\dots\dots 0,50p$

Finalizare: $E(x) = 1-x + \frac{2x+1}{2} = 1-x+x+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 0,50p$

b) Aplicăm inegalitatea mediilor ($m_a \geq m_g$) pentru numerele $3a^2$ și 5:

$\frac{3a^2+5}{2} \geq \sqrt{3a^2 \cdot 5} \Rightarrow 3a^2 + 5 \geq 2\sqrt{15a^2} \Rightarrow 3a^2 + 5 \geq 2\sqrt{15} \cdot |a|$ (1) 0,75p

Analog se găsește și $3b^2 + 5 \geq 2\sqrt{15} \cdot |b|$ (2) 0,75p

Finalizare: Din (1) și (2) $\Rightarrow (3a^2 + 5)(3b^2 + 5) \geq 60|a \cdot b| \geq 60ab \dots\dots\dots 0,50p$

c) Inegalitatea este echivalentă cu $16x^4 - 8x + 3 \geq 0, \forall x \in R$

Avem: $16x^4 - 8x + 3 = 16x^4 - 8x^2 + 1 + 8x^2 - 8x + 2 = \dots\dots\dots 0,75p$

$= (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 + 1 + 2[(2x)^2 - 2 \cdot 2x + 1] = (4x^2 - 1)^2 + 2(2x - 1)^2 \dots\dots\dots 1,5p$

Din $(4x^2 - 1)^2 \geq 0$ și $2(2x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (4x^2 - 1)^2 + 2(2x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^4 - 8x + 3 \geq 0 \dots\dots\dots 0,75p$

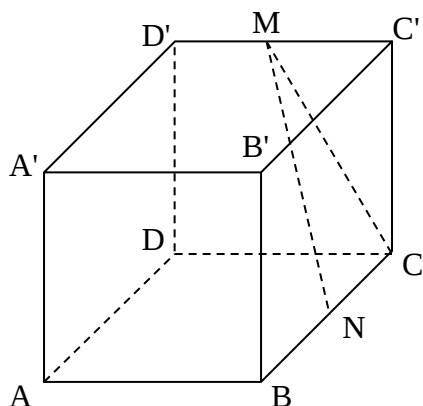
Problema 3

Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Se notează cu M, N, P, Q mijloacele laturilor $(D'C')$, (BC) , $(A'D')$, respectiv (DC) . Dimensiunile paralelipipedului sunt $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm și $C'C = 2$ cm.

a) Arătați că măsura unghiului dintre dreptele MN și AD este egală cu 45° .

b) Arătați că dreptele MN și PQ sunt perpendiculare.

Barem – Problema 3



$$a) AD \parallel BC \Rightarrow m(\widehat{MN, AD}) = m(\widehat{MN, BC}) = m(\widehat{MNC}) \dots\dots 1p$$

Arată că $NC \perp MC$ 0,50p

$$MC = \frac{5}{2} \text{ cm}, MN = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}, \dots\dots\dots 1p$$

$$\sin(\widehat{MNC}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(\widehat{MNC}) = 45^\circ \dots\dots\dots 0,50p$$

b) (soluția 1) Fie S mijlocul laturii (AB) . Arată că $MNSP$

este paralelogram $\Rightarrow MN \parallel PS$ 1p

$$\Rightarrow m(\widehat{MN, PQ}) = m(\widehat{PS, PQ}) = m(\widehat{QPS}) \dots\dots\dots 0,50p$$

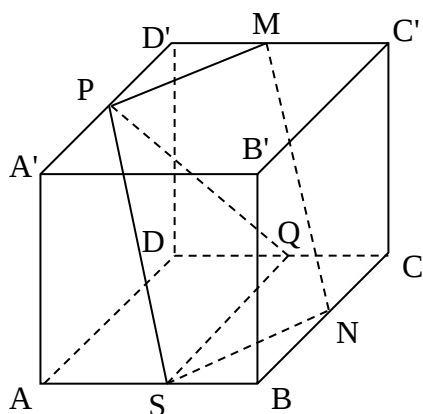
Arată că $A'SQD'$ este paralelogram $\Rightarrow SQ \parallel A'D' \Rightarrow$

A', D', P, S, Q sunt coplanare 0,50p

$$\Delta MNC \equiv \Delta SPA' \equiv \Delta QPD' \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow m(\widehat{MNC}) = 45^\circ = m(\widehat{SPA'}) = m(\widehat{QPD'}) \dots\dots\dots 0,50p$$

$$\Rightarrow m(\widehat{QPS}) = 90^\circ \Rightarrow SP \perp PQ \Rightarrow MN \perp PQ \dots\dots\dots 0,50p$$



b) (soluția 2) Fie O centrul bazei $A'B'C'D'$.

Arată că $OP \parallel QC$ și $(OP) \equiv (QC) \Rightarrow$ 1p

$OPQC$ este paralelogram $\Rightarrow PQ \parallel OC$ 0,50p

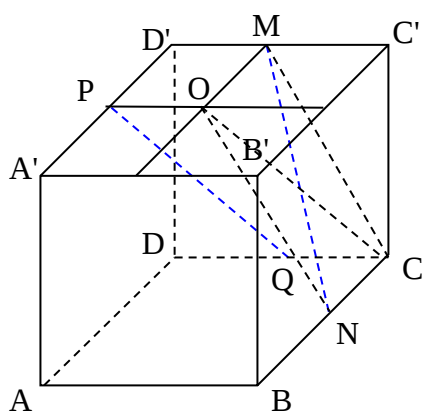
Arată că $OM \parallel NC \Rightarrow O, N, C, M$ sunt coplanare 0,50p

Din $(OM) \equiv (NC) \Rightarrow ONCM$ este paralelogram 0,50p

Din $NC \perp MC \Rightarrow ONCM$ este dreptunghi 0,50p

$$\text{Din } MC = NC = \frac{5}{2} \Rightarrow ONCM \text{ este romb} \Rightarrow \dots\dots\dots 0,50p$$

$ONCM$ este pătrat $\Rightarrow MN \perp OC$ sau $MN \perp PQ$ 0,50p



Problema 4 (prelucrare problema E:15629 din G.M.)

Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și punctele M și N mijloacele muchiilor BC , respectiv VD .

- Dacă $AB = AV$ și Q este mijlocul lui (VC) , stabiliți natura patrulaterului $MONQ$;
- Dacă $AB = AV$ aflați măsura unghiului determinat de dreptele AB și MN ;
- Dacă $m(\angle OMN) = 30^\circ$, demonstrați că $AB = AV$.

Barem – Problema 4

a) Notăm $AB = AV = 2a$

(OM) - l. mijl. în $\triangle BDC$ și (NQ) - l. mijl. în $\triangle VDC \Rightarrow OM = NQ = \frac{DC}{2} = \frac{2a}{2} = a$ 0,75p

(NO) - l. mijl. în $\triangle DVB$ și (QM) - l. mijl. în $\triangle VCB \Rightarrow NO = MQ = \frac{VB}{2} = \frac{2a}{2} = a$ 0,75p

Finalizare: $OM = MQ = QN = NO = a \Rightarrow MONQ = \text{romb}$ 0,50p

b) $AB \parallel OM \Rightarrow \sphericalangle(AB, MN) = \sphericalangle(OM, MN) = \sphericalangle(OMN)$ 0,50p

(OQ) - l. mijl. în $\triangle VCA \Rightarrow OQ = \frac{AV}{2} = \frac{2a}{2} = a$ 0,50p

$OQ = OM = MQ = a \Rightarrow \triangle OQM$ - echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle OMQ) = 60^\circ$ 0,50p

$MONQ = \text{romb} \Rightarrow (MN - \text{bisectoarea } \sphericalangle OMQ \Rightarrow m(\sphericalangle OMN) = 30^\circ$ 0,50p

c) Notăm: $AB = 2a$, $AV = 2b$ și fie $OM \cap AD = \{P\}$

(NP) - l mijl în $\triangle ADV \Rightarrow NP = \frac{AV}{2} = \frac{2b}{2} = b$ și, analog, $NO = \frac{VB}{2} = \frac{2b}{2} = b$

$\Rightarrow NP = NO \Rightarrow \triangle PNO$ isoscel 0,50p

Fie $NT \perp PO$, $T \in PO$ și imediat $PT = \frac{PO}{2} = \frac{a}{2}$ 0,50p

T. lui Pitagora în $\triangle PTN \Rightarrow TN^2 = PN^2 - PT^2 \Rightarrow TN^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$ (1) 0,50p

În $\triangle NMT$ dreptunghic în T , $m(\sphericalangle NMT) = 30^\circ \Rightarrow tg(\sphericalangle NMT) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,50p

Dar $tg(\sphericalangle NMT) = \frac{NT}{MT} = \frac{NT}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow \frac{NT}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow NT = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow NT^2 = \frac{3a^2}{4}$ (2) 0,50p

Din (1) și (2) $\Rightarrow b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow a = b \Rightarrow AB = AV$ 0.50p

