

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Un număr natural de forma $\overline{abcd}$ se numește ”faimos” dacă $5 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$.

a) (3p) Arătați că orice număr ”faimos” se divide cu 61.

b) (4p) Calculați suma tuturor numerelor ”faimoase”.

Prof. Gabriela Sascău

Soluție: a) Cum $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 5 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 3 \cdot \overline{cd} + \overline{cd} = 61 \cdot \overline{cd}$ rezultă că numărul $\overline{abcd}$ se divide cu 61.

b) Din $5 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$ și $(5, 3) = 1$, obținem că $\overline{cd}$ se divide cu 5, deci $\overline{cd} \in \{10, 15, 20, \dots, 95\}$.

Cum $\overline{abcd} = 61 \cdot \overline{cd}$, atunci cel mai mic număr ”faimos” este $61 \cdot 20$, iar cel mai mare număr ”faimos” este $61 \cdot 95$.

Atunci suma tuturor numerelor ”faimoase” este $61 \cdot 20 + 61 \cdot 25 + 61 \cdot 30 + \dots + 61 \cdot 95 =$
 $= 61 \cdot 5 \cdot (4 + 5 + 6 + \dots + 19) = 305 \cdot [(1 + 2 + 3 + \dots + 19) - (1 + 2 + 3)] = 305 \cdot (19 \cdot 20 : 2 - 6) =$
 $= 305 \cdot (19 \cdot 10 - 6) = 305 \cdot 184 = 56120$.

Barem

a) $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 5 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 3 \cdot \overline{cd} + \overline{cd} = 61 \cdot \overline{cd}$	2p
$\overline{abcd}$ se divide cu 61.	1p
b) $5 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$ și $(5, 3) = 1$, obținem că $\overline{cd}$ se divide cu 5.	1p
Cel mai mic număr ”faimos” este $61 \cdot 20$, iar cel mai mare număr ”faimos” este $61 \cdot 95$.	2p
Suma tuturor numerelor ”faimoase” este $61 \cdot 20 + 61 \cdot 25 + 61 \cdot 30 + \dots + 61 \cdot 95 =$ $= 61 \cdot 5 \cdot (4 + 5 + 6 + \dots + 19) = 305 \cdot (19 \cdot 20 : 2 - 6) = 305 \cdot 184 = 56120$.	1p

2. (7p) Determinați mulțimea $A = \{\overline{xy} / \overline{xy} : (x + 3y)\}$.

Prof. Liliana Timofti

Soluție: Din $\overline{xy} : (x + 3y) \Rightarrow (x + 3y) / (10x + y)$.

Din $(x + 3y) / (x + 3y) \Rightarrow (x + 3y) / 10(x + 3y) \Rightarrow (x + 3y) / (10x + 30y)$.

Atunci $(x + 3y) / (10x + 30y) - (10x + y) \Rightarrow (x + 3y) / 29y$.

Cum x și y cifre, cu $x \neq 0$, distingem următoarele cazuri:

Cazul I: Dacă $y = 0$ atunci $x / 0$ este adevărată pentru orice cifră nenulă x . Atunci obținem că $\overline{xy} \in \{10, 20, 30, \dots, 90\}$.

Cazul II: Dacă $y \neq 0$ distingem următoarele cazuri:

Cazul I: Dacă $(x + 3y, 29) = 1$, atunci din $(x + 3y) / 29y \Rightarrow (x + 3y) / y$ ceea ce este imposibil pentru că $x + 3y = x + 2y + y > y$, pentru orice cifre nenule x și y .

Cazul 2: Dacă $(x + 3y, 29) \neq 1$, cum 29 este număr prim obținem că $(x + 3y, 29) = 29$, deci $x + 3y$ este multiplu de 29. Cum x și y sunt cifre nenule $\Rightarrow 4 \leq x + 3y \leq 36$. Atunci $x + 3y = 29$ și relația $\overline{xy} : (x + 3y)$ devine $\overline{xy} : 29$, de unde obținem $\overline{xy} \in \{29, 58, 87\}$.

Prin urmare, $A = \{10, 20, 29, 30, 40, 50, 58, 60, 70, 80, 87, 90\}$.

Numărul submulțimilor nevide ale lui A este egal cu $2^{\text{Card}A} - 1 = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095$.

Barem:

Arată că $(x + 3y) / 29y$.	1p
Cazul I: Dacă $y = 0$ atunci $x / 0$ este adevărată pentru orice cifră nenulă x . Atunci	2p

obținem că $\overline{xy} \in \{10, 20, 30, \dots, 90\}$	
<i>Cazul II:</i> Dacă $y \neq 0$ distingem următoarele cazuri: <i>Cazul 1:</i> Dacă $(x+3y, 29) = 1$, atunci din $(x+3y)/29y \Rightarrow (x+3y)/y$ ceea ce este imposibil pentru că $x+3y = x+2y+y > y$, pentru orice cifre nenule x și y.	1p
<i>Cazul 2:</i> Dacă $(x+3y, 29) \neq 1$, cum 29 este număr prim obținem că $(x+3y, 29) = 29$, deci $x+3y$ este multiplu de 29. Cum x și y sunt cifre nenule $\Rightarrow 4 \leq x+3y \leq 36$. Atunci $x+3y = 29$ și relația $\overline{xy}:(x+3y)$ devine $\overline{xy}:29$, de unde obținem $\overline{xy} \in \{29, 58, 87\}$.	2p
Finalizează $A = \{10, 20, 29, 30, 40, 50, 58, 60, 70, 80, 87, 90\}$.	1p

3. Se consideră unghiurile AOB , BOC , COD , DOE și EOA în jurul punctului O . Măsurile unghiurilor AOB și BOC sunt direct proporționale cu 6 și 10, iar măsurile unghiurilor BOC și COD sunt invers proporționale cu 4 și 5. Unghiurile AOB și DOE sunt complementare. Bisectoarele OM și ON ale unghiurilor AOC , respectiv DOE formează un unghi cu măsura de 175° .

a) (3p) Demonstrați că OC este bisectoarea unghiului MOD .

b) (4p) Determinați măsura unghiului AOE .

Supliment Gazeta Matematică Nr.10/2019

Soluție: a) $\frac{\sphericalangle AOB}{6} = \frac{\sphericalangle BOC}{10} \Leftrightarrow \frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{5}$.

$$\sphericalangle BOC \cdot 4 = \sphericalangle COD \cdot 5 \Leftrightarrow \frac{\sphericalangle BOC}{5} = \frac{\sphericalangle COD}{4}.$$

Atunci $\frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{5} = \frac{\sphericalangle COD}{4} = k \Rightarrow \sphericalangle AOB = 3k, \sphericalangle BOC = 5k$ și $\sphericalangle COD = 4k$.

Cazul în care semidreapta OB este în exteriorul unghiului AOC este imposibil și rămâne doar cazul în care semidreapta OB este în interiorul unghiului AOC când avem:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 3k + 5k = 8k.$$

OM bisectoarea $\sphericalangle AOC \Rightarrow OM$ în interiorul $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle AOM = \sphericalangle MOC = \frac{\sphericalangle AOC}{2} = \frac{8k}{2} = 4k$.

Din OC în interiorul $\sphericalangle MOD$ și $\sphericalangle MOC = \sphericalangle COD = 4k \Rightarrow OC$ este bisectoarea unghiului MOD .

b) Din $\sphericalangle AOB + \sphericalangle DOE = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle DOE = 90^\circ - \sphericalangle AOB = 90^\circ - 3k$.

ON bisectoarea $\sphericalangle DOE \Rightarrow \sphericalangle DON = \sphericalangle NOE = \frac{\sphericalangle DOE}{2} = \frac{90^\circ - 3k}{2}$.

Dar $\sphericalangle MON = 175^\circ \Rightarrow \sphericalangle MOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DON = 175^\circ \Rightarrow 4k + 4k + \frac{90^\circ - 3k}{2} = 175^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8k + \frac{90^\circ - 3k}{2} = 175^\circ \Rightarrow \frac{16k + 90^\circ - 3k}{2} = 175^\circ \Rightarrow \frac{13k + 90^\circ}{2} = 175^\circ \Rightarrow 13k + 90^\circ = 350^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13k = 260^\circ \Rightarrow k = 20^\circ.$$

Atunci $\sphericalangle AOB = 60^\circ$, $\sphericalangle BOC = 100^\circ$, $\sphericalangle COD = 80^\circ$ și $\sphericalangle DOE = 30^\circ$.

Din $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 100^\circ + 80^\circ + 30^\circ + \sphericalangle EOA = 360^\circ \Rightarrow \sphericalangle EOA = 90^\circ$.

Barem

a) Obține $\frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{5} = \frac{\sphericalangle COD}{4} = k \Rightarrow \sphericalangle AOB = 3k, \sphericalangle BOC = 5k, \sphericalangle COD = 4k$	2p
Arată OC în interiorul $\sphericalangle MOD$ și $\sphericalangle MOC = \sphericalangle COD = 4k \Rightarrow OC$ este bisectoarea unghiului MOD	1p

b) Din $\sphericalangle AOB + \sphericalangle DOE = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle DOE = 90^\circ - \sphericalangle AOB = 90^\circ - 3k$	1p
ON bisectoarea $\sphericalangle DOE \Rightarrow \sphericalangle DON = \sphericalangle NOE = \frac{\sphericalangle DOE}{2} = \frac{90^\circ - 3k}{2}$	1p
Din $\sphericalangle MON = 175^\circ$ determină $k = 20^\circ$	1p
Din $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360^\circ$ determină $\sphericalangle EOA = 90^\circ$	1p

4. Se consideră cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ cu $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 3$ cm și $O_1O_2 = 4,5$ cm. Dacă dreapta t este tangentă cercului $C_1(O_1, r_1)$ în punctul A și tangentă cercului $C_2(O_2, r_2)$ în punctul B , atunci:

a) (2p) determinați pozițiile relative ale celor două cercuri (justificare);

b) (5p) arătați că bisectoarea unghiului AO_1B este paralelă cu bisectoarea unghiului O_1BO_2 .

Prof. Claudia Marchitan

Soluție: a) Cum $r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$ (cm), $r_2 - r_1 = 3 - 2 = 1$ (cm), atunci $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2$ și astfel cele două cercuri sunt secante.

b) Din t tangentă cercului $C_1(O_1, r_1)$ în punctul $A \Rightarrow O_1A \perp t$.

Din t tangentă cercului $C_2(O_2, r_2)$ în punctul $B \Rightarrow O_2B \perp t$.

Din $O_1A \perp t$ și $O_2B \perp t \Rightarrow O_1A \parallel O_2B$.

Din $O_1A \parallel O_2B$ cu secanta $O_1B \Rightarrow \sphericalangle AO_1B \equiv \sphericalangle O_1BO_2$ (alterne interne).

Dacă semidreapta O_1M este bisectoarea $\sphericalangle AO_1B \Rightarrow \sphericalangle AO_1M = \sphericalangle MO_1B = \frac{\sphericalangle AO_1B}{2}$.

Dacă semidreapta BP este bisectoarea $\sphericalangle O_1BO_2 \Rightarrow \sphericalangle O_1BP = \sphericalangle PBO_2 = \frac{\sphericalangle O_1BO_2}{2}$.

Atunci $\sphericalangle MO_1B \equiv \sphericalangle O_1BP$ (jumătăți de unghiuri congruente).

Cum dreptele O_1M și BP formează cu secanta O_1B unghiurile alterne interne $\sphericalangle MO_1B \equiv \sphericalangle O_1BP$, atunci $O_1M \parallel BP$.

Barem

a) Cum $r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$ (cm), $r_2 - r_1 = 3 - 2 = 1$ (cm), atunci $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2$ și astfel cele două cercuri sunt secante.	2p
b) Din t tangentă cercului $C_1(O_1, r_1)$ în punctul $A \Rightarrow O_1A \perp t$. Din t tangentă cercului $C_2(O_2, r_2)$ în punctul $B \Rightarrow O_2B \perp t$.	1p
Din $O_1A \perp t$ și $O_2B \perp t \Rightarrow O_1A \parallel O_2B$.	1p
Din $O_1A \parallel O_2B$ cu secanta $O_1B \Rightarrow \sphericalangle AO_1B \equiv \sphericalangle O_1BO_2$ (alterne interne)	1p
Dacă semidreapta O_1M este bisectoarea $\sphericalangle AO_1B \Rightarrow \sphericalangle AO_1M = \sphericalangle MO_1B = \frac{\sphericalangle AO_1B}{2}$ Dacă semidreapta BP este bisectoarea $\sphericalangle O_1BO_2 \Rightarrow \sphericalangle O_1BP = \sphericalangle PBO_2 = \frac{\sphericalangle O_1BO_2}{2}$ Atunci $\sphericalangle MO_1B \equiv \sphericalangle O_1BP$ (jumătăți de unghiuri congruente).	1p
Cum dreptele O_1M și BP formează cu secanta O_1B unghiurile alterne interne $\sphericalangle MO_1B \equiv \sphericalangle O_1BP$, atunci $O_1M \parallel BP$.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.