



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 01.02.2020
CLASA A VI-A
Județul Vâlcea

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1

Pentru orice două numere naturale m și n notăm $A(m, n) = m^2 + n^2 + 2mn$ (de exemplu, $A(3, 4) = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$).

a) Arătați că $A(1, 2) + A(2, 4)$ este divizibil cu 9.

b) Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al numerelor $A(3, 6)$ și $A(4, 8)$.

c) Notăm cu $M = \{n \in \mathbb{N}^* | A(n, n) \leq 2020\}$ și cu S suma elementelor lui M . Calculați numărul de divizori ai lui S .

SOLUȚIE:

a) $A(1, 2) = 9$

$$A(2, 4) = 36$$

$$9 + 36 = 45 : 9 \dots\dots\dots (1p)$$

b) $A(3, 6) = 81 = 3^4$

$$A(4, 8) = 144 = 2^4 \cdot 3^2 \dots\dots\dots (1p)$$

$$(81, 144) = 3^2 = 9$$

$$[81, 144] = 3^4 \cdot 2^4 = 1296 \dots\dots\dots (1p)$$

c) $A(n, n) = (2n)^2 \dots\dots\dots (2p)$

$$(2n)^2 \leq 2020 \Rightarrow 2n \leq 44 \Rightarrow n \leq 22$$

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 22\} \dots\dots\dots (1p)$$

$$S = 11 \cdot 22 = 242$$

$$|D_S| = 2 \cdot 2 = 4 \dots\dots\dots (1p)$$

SUBIECTUL 2

Dintr-un caiet cu 100 de file, Andi și David rup file astfel: Andi rupe 25 de file (nu neapărat consecutive) și adună numerele scrise pe acestea, iar David rupe 26 de file din cele rămase (nu neapărat consecutive) și aduna, la fel, numerele de pe ele. Cei doi copii au obținut același răspuns, 2020. Este posibil ca vreunul să fi greșit? Justificați răspunsul.

a) Este posibil ca Andi să fi greșit? Justificați.

b) Este posibil ca David să fi greșit? Justificați.

SOLUȚIE:

a) Pe fiecare filă, suma numerelor scrise este un număr impar. (1p)

Cum Andi rupe 25 de file (număr impar!), înseamnă că suma obținută de el este număr impar, iar 2020 este număr par. Deci, Andi a greșit. (2p)

b) Observăm că, dacă pe o filă este scris un număr de forma $2k + 1$, pe verso va fi $2k + 2$, deci suma este de forma $4k + 3$ (1p)

Suma numerelor de pe filele rupte de David este:

$$S = (4n_1 + 3) + (4n_2 + 3) + \dots + (4n_{26} + 3)$$

$$S = 4 \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_{26}) + 3 \cdot 26$$

$$S = M_4 + 78$$

$$S = M_4 + 2 \dots \dots \dots (2p)$$

Cum $2020 \in M_4 \Rightarrow$ David a greșit. (1p)

SUBIECTUL 3

Un corp al armatei S.U.A. are mai puțin de 15 000 de militari. Pentru paradă, generalul le ordonă să se încoloneze câte 8, apoi câte 9, câte 10 și câte 11. În primele trei situații, rămâne câte un militar singur, iar în a patra rămâne o coloană de 9 militari.

a) Verificați dacă în corpul de armată ar putea fi 361 de militari.

b) Aflați numărul maxim de militari.

SOLUȚIE:

a) Notăm cu n numărul de soldați.

$$n = M_8 + 1 = M_9 + 1 = M_{10} + 1 = M_{11} + 9 \dots\dots\dots (1p)$$

Un număr care împărțit pe rând la 8, 9, 10 dă de fiecare restul 1 este $[8, 9, 10] + 1 = 361$. În plus, $361 = M_{11} + 9$, deci pot fi 361 de militari..... (1p)

b) $n - 361 = M_8 - 360 = M_9 - 360 = M_{10} - 360 = M_{11} - 352 \dots\dots\dots (2p)$

$$n - 361 = M_8 = M_9 = M_{10} = M_{11} \dots\dots\dots (1p)$$

Deci, $n = M_{[8, 9, 10, 11]} + 361 \dots\dots\dots (1p)$

Cum $n < 15000 \Rightarrow$ numărul maxim de militari este de 12241..... (1p)

SUBIECTUL 4

În jurul punctului O considerăm unghiurile $\sphericalangle A_0OA_1, \sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \dots, \sphericalangle A_{n-1}OA_n, \sphericalangle A_nOA_0$, astfel încât $m(\sphericalangle A_{n-1}OA_n) = n^2$ grade și $m(\sphericalangle A_nOA_0) = a$ grade.

a) Calculați $m(\sphericalangle A_0OA_3)$.

b) Determinați valoarea maximă a lui n și $m(\sphericalangle A_nOA_0)$ (pentru n maxim).

c) Arătați că există cel puțin două semidrepte $(OA_x$ și $(OA_y$ astfel încât $(OA_x \perp (OA_y$.

SOLUȚIE:

a) $\sphericalangle A_0OA_1 = 1^0$, $\sphericalangle A_1OA_2 = 4^0$, $\sphericalangle A_2OA_3 = 9^0$ (1p)

$\sphericalangle A_0OA_3 = 14^0$ (1p)

b) $\sphericalangle A_{n-1}OA_n \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, \dots\}$ (1p)

$$1+4+9+\dots+81=285$$

$$1+4+9+\dots+81+100=385>360 \text{ (1p)}$$

$$\text{Deci, } n = 9 \text{ și } \sphericalangle A_nOA_0 = 360^0 - 285^0 = 75^0 \text{(1p)}$$

$$c) 4+9+16+25+36=90 \Rightarrow \sphericalangle A_1OA_6 = 90^0 \Rightarrow OA_1 \perp OA_6 \text{(2p)}$$

Notă: Orice soluție **corectă**, alta decât cea din barem, se punctează cu punctajul maxim corespunzător.