

CLASA a XI-a, varianta 2

Problema 1. Arătați că, dacă $n \geq 2$ este un număr întreg, atunci există matricele inversabile $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu elementele nenule, așa încât $A_1^{-1} + A_2^{-1} + \dots + A_n^{-1} = (A_1 + A_2 + \dots + A_n)^{-1}$.

Gazeta Matematică

Soluție. Egalitatea este echivalentă cu $(A_1 + A_2 + \dots + A_n)(A_1^{-1} + A_2^{-1} + \dots + A_n^{-1}) = I_2 \dots$ **2p**

Vom lua $A_1 = A, A_2 = \dots = A_n = B$. Cerința devine $I_2 + (n-1)AB^{-1} + (n-1)BA^{-1} + (n-1)^2 I_2 = I_2$. Notând $AB^{-1} = X$, căutăm X astfel încât $X + X^{-1} + (n-1)I_2 = 0_2$, sau $X^2 + (n-1)X + I_2 = 0_2$.

Astfel, putem lua $X = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ -1 & -n \end{pmatrix} \dots \dots \dots$ **3p**

Pentru acest X putem lua $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2n-1 & -3n-2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \dots \dots \dots$ **2p**

Problema 2. Considerăm mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid ab = cd \right\}$.

a) Dați exemplul de matrice $A \in M$ astfel încât $A^{2017} \in M$ și $A^{2019} \in M$, dar $A^{2018} \notin M$.

b) Arătați că, dacă $A \in M$ și există numărul întreg $k \geq 1$ astfel încât $A^k \in M, A^{k+1} \in M$ și $A^{k+2} \in M$, atunci $A^n \in M$, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 1$.

Soluție. a) Luăm $A \in M$ astfel încât $A^2 \notin M$ și $A^2 + A + I_2 = 0_2$, deci $A^3 = I_2 = A^{2019} \in M, A^{2017} = A \in M$ și $A^{2018} = A^2 \notin M$. Un exemplu este $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{3/2} & -2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots$ **2p**

b) Din teorema Hamilton-Cayley reiese recursiv că există $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^{k+2} = \alpha A + \beta I_2$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obținem $(\alpha a + \beta)ab = \alpha c(ad + \beta)$, de unde $\alpha\beta(b - c) = 0 \dots \dots \dots$ **1p**

I) Dacă $b = c$, atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; în ambele cazuri $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots \dots \dots$ **1p**

II) Dacă $b \neq c$, atunci $\alpha = 0$ sau $\beta = 0, A^{k+2} = \beta I_2$ sau $A^{k+2} = \alpha A$ și analizăm în funcție de $\delta = \det(A)$.

II.1) Dacă $\delta = 0$, atunci $A \in M$ și $A^n = (\text{tr}(A))^{n-1} A \in M$ pentru $n \geq 2 \dots \dots \dots$ **1p**

II.2) Dacă $\delta \neq 0$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\beta} A^{k+1}, \beta \neq 0$ sau $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^k, \alpha \neq 0$, deci $A^{-1} \in M$. Cum $A^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, obținem $bd = ac$, iar $ab = cd$ duce la $b(a+d) = c(a+d)$, deci $a+d = 0$. Aceasta

duce mai departe la $a = d = 0$, caz în care $A^n = \begin{pmatrix} 0 & b^n \\ c^n & 0 \end{pmatrix}$ pentru n impar și $A^n = \begin{pmatrix} b^n & 0 \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ pentru n par, sau la $a = -d \neq 0$, de unde $b = -c$ și $A^{2n} = (a^2 - b^2)^n I_2, A^{2n+1} = (a^2 - b^2)^n A$; în toate cazurile reiese $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots \dots \dots$ **2p**

Problema 3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu proprietățile $a_n > 1$ și $a_{n+1}^2 \geq a_n a_{n+2}$, oricare ar fi $n \geq 1$. Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ dat de $x_n = \log_{a_n} a_{n+1}$ pentru $n \geq 1$ este convergent și calculați-i limita.

Soluție. Din ipoteză reiese $2 \geq \log_{a_{n+1}} a_n + \log_{a_{n+1}} a_{n+2} = \frac{1}{x_n} + x_{n+1} \quad (*) \dots \dots \dots$ **1p**

Deducem $x_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \leq x_n$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător $\dots \dots \dots$ **2p**

Cum șirul are termenii pozitivi, rezultă că el este convergent către o limită $x \dots \dots \dots$ **2p**

Trecând la limită în $(*)$ obținem $(x - 1)^2 \leq 0$, deci $x = 1 \dots \dots \dots$ **2p**

Problema 4. Fie $a < b$ numere reale și $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție astfel încât funcțiile $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x - a)f(x)$ și $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = (x - b)f(x)$ să fie crescătoare. Arătați că funcția f este continuă pe (a, b) .

Soluție. Fie $a < c < b$. Pentru $x \in (c, b)$ avem $g(x) \geq g(c)$ și, cum $x - a > 0, f(x) \geq \frac{c-a}{x-a} f(c)$. Apoi, din $h(x) \geq h(c)$ și $x - b < 0$ rezultă $f(x) \leq \frac{c-b}{x-b} f(c)$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow c} \frac{c-a}{x-a} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{c-b}{x-b} = 1$, folosind criteriul cleștelui, deducem $\lim_{x \searrow c} f(x) = f(c) \dots \dots \dots$ **5p**

Analog obținem $\lim_{x \nearrow c} f(x) = f(c)$, deci funcția este continuă în orice punct $c \in (a, b) \dots \dots \dots$ **2p**