MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a 12-a

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(2x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
a) Determinați toate funcțiile din $\mathcal{F}$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$.
b) Dați un exemplu de funcție $f \in \mathcal{F}$, integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, neconstantă, cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Problema 2. Determinați toate inelele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea că $x^3 \in \{0, 1\}$ pentru orice element $x \in A$.

Problema 3. Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcții crescătoare.
a) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $b \in [f(a-0), f(a+0)]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^x f(t)\,dt \geq b(x-a)\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

b) Dacă $[f(a-0), f(a+0)] \cap [g(a-0), g(a+0)] \neq \emptyset$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, arătați că

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt\,, \qquad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

(Prin $u(a-0)$ și $u(a+0)$ am notat limitele la stânga, respectiv la dreapta ale unei funcții u în punctul $a \in \mathbb{R}$.)

Problema 4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, cu centrul $Z = \{a \in R \mid ar = ra, \forall r \in R\}$, cu proprietatea că grupul $U = U(R)$ al elementelor sale inversabile este finit. Dacă G este grupul automorfismelor grupului aditiv $(R, +)$, arătați că

$$|G| \geq \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}\,.$$

($|M|$ reprezintă cardinalul mulțimii M.)

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a 12-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(2x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
a) Determinați toate funcțiile din $\mathcal{F}$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$.
b) Dați un exemplu de funcție $f \in \mathcal{F}$, integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, neconstantă, cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Soluție.
a) Vom arăta ca singurele funcții din $\mathcal{F}$ care admit primitive sunt funcțiile constante.
Orice funcție constantă se găsește în mod evident în mulțimea $\mathcal{F}$ și admite primitive.
. . . . **1p**.
Fie $f \in \mathcal{F}$ o funcție care admite primitive și F primitiva sa cu proprietatea că $F(0) = 0$. Funcția $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = F(2x) - 2F(x)$ este atunci derivabilă, cu $g'(x) = 2f(2x) - 2f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, și este deci o funcție constantă. Cum $g(0) = -F(0) = 0$, rezultă că $F(2x) = 2F(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ . . . . **2p**.
Prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ avem atunci că $F(x) = 2^n F\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} x \cdot \frac{F\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = x \cdot f(0).$$

Rezultă că $f(x) = F'(x) = f(0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și funcția f este constantă . . . . **2p**.
b) Fie $M = \{2^k | k \in \mathbb{Z}\}$ și $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } x \in M \\ 0 & , \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus M. \end{cases}$$

Deoarece mulțimea punctelor sale de discontinuitate este $M \cup \{0\}$, o mulțime numărabilă, f este o funcție integrabilă **1p**,
și cum f este nulă aproape peste tot, rezultă că $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
. . . . **1p**.

Problema 2. Determinați toate inelele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea că $x^3 \in \{0, 1\}$ pentru orice element $x \in A$.

Soluție.
Vom arăta că singurele inele care verifică condiția din enunț sunt corpurile $\mathbb{Z}_2$ ș $\mathbb{F}_4$.
Acestea satisfac în mod evident condiția din enunț. . . . . **1p**.
Fie A un inel cu proprietatea din enunț. Orice element $x \in A$ este atunci fie nilpotent, cu

$x^3 = 0$, fie inversabil, cu $x^3 = 1$. Deoarece -1 este inversabil, avem că $(-1)^3 = 1$, deci $-1 = 1$ și $1 + 1 = 0$. .... **1p.**
Fie x un element neinversabil al inelului A. Atunci $x^3 = 0$ și $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 1$, astfel că $x + 1$ este inversabil. Rezultă că $(x+1)^3 = 1$, de unde obținem ca $3x^2 + 3x = 0$, sau, echivalent, $x^2 = x$. Atunci $x = x^2 = x^3 = 0$, astfel că $U(A) = A \setminus \{0\}$ și A este un corp, de caracteristică $char(A) = 2$. **2p**
Dacă $A = \{0, 1\}$, atunci $A \simeq \mathbb{Z}_2$.
Fie în continuare A un corp cu $|A| \geq 4$ care verifică proprietatea din enunț. Pentru $x \in A \setminus \{0, 1\}$ avem atunci că $x + 1 \neq 0$, astfel că $x^3 = 1 = (x+1)^3$. Obținem atunci că $x^2 - x = x^2 + x = 1$ și $x^2 - x \in Z(A)$ pentru orice $x \in A$, de unde rezultă că corpul A este comutativ........... **2p.**
Ecuația $x^3 = 1$ nu poate avea atunci mai mult de 3 soluții în corpul A, astfel că $|A| \leq 4$. Prin urmare, $A = \mathbb{F}_4$, corpul cu 4 elemente. .... **1p.**

Problema 3. Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcții crescătoare.
a) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $b \in [f(a-0), f(a+0)]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^x f(t)\,dt \geq b(x-a)\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

b) Dacă $[f(a-0), f(a+0)] \cap [g(a-0), g(a+0)] \neq \emptyset$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, arătați că

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt\,, \qquad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

(Prin $u(a-0)$ și $u(a+0)$ am notat limitele la stânga, respectiv la dreapta ale unei funcții u în punctul $a \in \mathbb{R}$.)

Soluție.
a) Deoarece f este crescătoare, au loc inegalitățile

$$f(t) \leq f(a-0) \leq b\,, \quad \text{pentru orice } t < a,$$

respectiv

$$f(t) \geq f(a+0) \geq b\,, \quad \text{pentru orice } t > a,$$

de unde rezultă imediat cerința. **2p**
b) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, oarecare fixate, și $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare fixat. Considerăm diviziunea echidistantă $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$, cu $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = \overline{0, n}$, și pentru fiecare $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ câte un număr $y_k \in [f(x_k - 0), f(x_k + 0)] \cap [g(x_k - 0), g(x_k + 0)]$. Atunci pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ avem inegalitățile

$$y_k(x_{k+1} - x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt, \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dt \leq y_{k+1}(x_{k+1} - x_k)\,,$$

.... **1p**
astfel că

$$(y_k - y_{k+1}) \cdot \frac{b-a}{n} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dt \leq (y_{k+1} - y_k) \cdot \frac{b-a}{n}$$

și prin însumare obținem că

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt\right| \leq \frac{b-a}{n}(y_n - y_0) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\cdot(b-a)(\max(f(b+0),g(b+0)) - \min(f(a-0),g(a-0)).$$

.... **3p**

Cum $n \in \mathbb{N}^*$ este oarecare, rezultă că

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt\,,$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. **1p**

Problema 4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, cu centrul $Z = \{a \in R|\, ar = ra, \forall r \in R\}$, cu proprietatea că grupul $U = U(R)$ al elementelor sale inversabile este finit. Dacă G este grupul automorfismelor grupului aditiv $(R, +)$, arătați că

$$|G| \geq \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}\,.$$

($|M|$ reprezintă cardinalul mulțimii M.)

Soluție.

Pentru orice element inversabil $a \in U$ putem defini funcțiile

$$s_a : R \longrightarrow R : x \mapsto s_a(x) = a \cdot x\,,$$

și

$$d_a : R \longrightarrow R : x \mapsto d_a(x) = x \cdot a\,.$$

Acestea verifică egalitățile $s_a \circ s_b = s_{ab}$, respectiv $d_{a^{-1}} \circ d_{b^{-1}} = d_{(ab)^{-1}}$, ... **1p**
astfel că $s_a \circ s_{a^{-1}} = s_{a^{-1}} \circ s_a = d_a \circ d_{a^{-1}} = d_{a^{-1}} \circ d_a = id_R$ și rezultă că s_a și d_a sunt bijective **1p**
De asemenea, $s_a(x+y) = a\cdot(x+y) = ax+ay = s_a(x)+s_a(y)$, respectiv $d_a(x+y) = (x+y)\cdot a = xa + ya = d_a(x) + d_a(y)$, pentru orice $x, y \in R$, astfel că $s_a, d_a \in G$. **1p**
Cum funcțiile $s, d : U \longrightarrow G$, $s(a) = s_a$, respectiv $d(a) = d_{a^{-1}}$ sunt morfisme injective de grupuri, rezultă că $S = Im(s)$ și $D = Im(d)$ sunt subgrupuri ale lui G, izomorfe cu U. **1p**
Pentru orice $a, b \in U$ avem că $(s_a \circ d_b)(x) = axb = (d_b \circ s_a)(x)$, pentru orice $x \in R$, astfel că $s_a \circ d_b = d_b \circ s_a$. Rezultă că $SD = DS$ și $H = SD$ este un subgrup al grupului G și deci $|G| \geq |H|$. **1p**
Fie $a, b \in U$ astfel încât $s_a = d_b \in S \cap D$. Atunci $a = s_a(1) = d_b(1) = b$ și pentru orice $x \in R$ avem $ax = s_a(x) = d_a(x) = xa$, astfel că $a \in Z \cap U$. Rezultă că $S \cap D = s(Z \cap U)$. **1p**
Deoarece pentru orice subgrupuri finite ale unui grup avem

$$|SD| = \frac{|S||D|}{|S \cap D|}\,,$$

obținem

$$|G| \geq |H| = |SD| = \frac{|S||D|}{|S \cap D|} = \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}\,.$$

.... **1p**