

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

11.02.2023

CLASA A VII-A

BAREM

1. $(x-2020) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2023} \right) = \frac{6066}{6069} \dots\dots\dots 1p$
 $(x-2020) \cdot \left(\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{2020 \cdot 2023} \right) = \frac{6066 \cdot 3}{6069} \dots\dots\dots 1p$
 $(x-2020) \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2023} \right) = \frac{6066 \cdot 3}{6069} \dots\dots\dots 1p$
 $(x-2020) \cdot \left(1 - \frac{1}{2023} \right) = \frac{6066 \cdot 3}{6069} \dots\dots\dots 1p$
 $(x-2020) \cdot \frac{2022}{2023} = \frac{6066 \cdot 3}{6069} \dots\dots\dots 1p$
 $x-2020 = \frac{6066 \cdot 3}{6069} \cdot \frac{2023}{2022} \Rightarrow x-2020 = 3 \dots\dots\dots 1p$
 $x=2023 \dots\dots\dots 1p$
2. MN linie mijlocie , $MN \parallel AB \parallel CD, MN = \frac{AB+CD}{2} = \frac{a+b}{2} \dots\dots\dots 1p$
 $CP \perp AB, P \in AB, CP = h, CP \cap MN = \{T\}$
 În triunghiul CBP , conform Reciprocei teoremei liniei mijlocii, MT linie mijlocie $\Rightarrow CT = TP = \frac{CP}{2} = \frac{h}{2} \dots\dots\dots 1p$
 CT înălțime în trapezul NMCD și TP înălțime în trapezul ABMN.
 $A_{ABMN} = \frac{(AB+MN) \cdot TP}{2} = \frac{\left(a + \frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{2a+a+b}{2}\right) \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{(3a+b) \cdot h}{8} \dots\dots\dots 2p$

$$A_{NMCD} = \frac{(NM + CD) \cdot CT}{2} = \frac{\left(\frac{a+b}{2} + b\right) \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{a+b+2b}{2}\right) \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{(a+3b) \cdot h}{8} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{A_{ABMN}}{A_{NMCD}} = \frac{\frac{(3a+b) \cdot h}{8}}{\frac{(a+3b) \cdot h}{8}} = \frac{3a+b}{a+3b} \dots\dots\dots 1p$$

3. Se obseva că $N > \sqrt{2}, N \in \mathbb{Q} \Rightarrow N \geq 2 \dots\dots\dots 1p$

$$N^2 = 2 + \sqrt{0 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}} \dots\dots\dots 1p$$

$$(N^2 - 2)^2 = 0 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} \dots\dots\dots 1p$$

$$(N^2 - 2)^4 - 2 = \sqrt{2 + \sqrt{x}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left(\left((N^2 - 2)^4 - 2\right)^2 - 2\right)^2 = x \dots\dots\dots 1p$$

Deoarece cea mai mica valoare a lui N este 2.....1p

$$\Rightarrow \left(\left((2^2 - 2)^4 - 2\right)^2 - 2\right)^2 = x \Rightarrow x = 194^2 \dots\dots\dots 1p$$

4.a) AMDN patrulater inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle MAN + \sphericalangle MDN = 180^\circ \dots\dots\dots 1p$

$\triangle ADM$ și $\triangle ADN$ isoscele de bază AD1 p

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle MAD + \sphericalangle NAD = \sphericalangle MDA + \sphericalangle NDA = \sphericalangle MDN \dots\dots\dots 1p$$

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle MDN = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

b) Centrul cercului circumscris triunghiului ABC este mijlocul O al laturii BC ...1p

Centrul cercului circumscris patrulaterului AMDN este mijlocul P al

segmentului MN1p

A, P și O sunt coliniare1p