

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**15 Februarie 2023**

**clasa a 11-a**

1. a) Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}$  oarecare și  $V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$  determinantul Vandermonde asociat. Exprimați în funcție de  $V(a, b, c)$  determinanții  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & b+c & a^2 \\ 1 & c+a & b^2 \\ 1 & a+b & c^2 \end{vmatrix}$  și  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ .
- b) Calculați determinantul  $\Delta$  de mai jos, scriind rezultatul sub formă de produs:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix}.$$

2. Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , și  $A = (a_{ij})_{i,j=1,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  matricea cu elementele

$$a_{ij} = \begin{cases} 1-n & , \text{ dacă } i=j, \\ 1 & , \text{ dacă } i \neq j. \end{cases}$$

Calculați  $A^m$  pentru  $m \in \mathbb{N}^*$ .

3. Calculați limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+3x}}{\sqrt[4]{1+4x} + x - \sqrt[6]{1+x}}.$$

4. Fie  $a > 0$  un număr real pozitiv oarecare și considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 = a$  și  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$  pentru orice  $n \geq 1$ .
- a) Studiați convergența șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  și, în caz de convergență, calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- b) Demonstrați că șirul  $(nx_n)_{n \geq 1}$  este convergent și calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ .

**Notă:**

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de 3 ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte.