

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a VII-a

1. a) Aflați al 2023-lea termen al șirului de mai jos:
 $1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 9; \dots$
b) Aflați numerele raționale p și q care verifică următoarea egalitate :
$$p \cdot \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + q \cdot |1 - \sqrt{5}| = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}.$$
2. a). Arătați că nu există numere raționale de forma $\sqrt{b0b0b0b0b}$, unde numărul de sub radical este un număr natural scris în baza 10, iar b este o cifră nenulă.

b). Arătați că există o infinitate de numere raționale de forma $\sqrt{2^m + 2^n + 2^p}$, unde m, n și p sunt numere naturale.
3. Două cercuri secante, cu centrele în punctele O_1 și O_2 , au lungimile 6π cm, respectiv 12π cm. Distanța dintre centrele lor este egală cu 4 cm. Punctele comune ale celor două cercuri sunt A și B . Se notează cu $[MN]$ și $[PQ]$ diametrele paralele cu dreapta AB ale cercului mic, respectiv cercului mare, astfel încât punctele M și Q să fie de aceeași parte a dreptei O_1O_2 .
a) Calculați perimetrul patrulaterului $MNPQ$.
b) Calculați aria patrulaterului cu vârfurile în punctele A, B, P și Q .
4. Fie $ABCD$ un patrulater convex, astfel încât $\angle A < 60^\circ$, O punctul de intersecție a diagonalelor, $OB \equiv OD$ și $3 \cdot OC = OA$. Arătați că patrulaterul $ABCD$ are cel mult un unghi drept.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.

Succes!