

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Locală, județul Timiș**  
**15 Februarie 2023**

**clasa a 10-a**

1. a) Arătați că  $\log_3(5) < \frac{3}{2}$ .  
b) Determinați partea întreagă a numărului  $\log_3(5) + \log_5(7) + \log_7(3)$ .
2. a) Arătați că  $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$ , pentru orice  $z \in \mathbb{C}^*$ .  
b) Fie  $z \in \mathbb{C}^*$  astfel încât  $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$ . Demonstrați că  $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$ .
3. Se consideră punctele  $A, B, C$  de afixe  $a, b$ , respectiv  $c$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Demonstrați că, dacă are loc egalitatea  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ , atunci triunghiul  $ABC$  este echilateral.
4. Pe laturile triunghiului  $ABC$  se construiesc spre exterior triunghiurile asemenea  $KBC \sim LCA \sim MAB$ . Arătați că triunghiurile  $ABC$  și  $KLM$  au același centru de greutate.

**Notă:**

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de 3 ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte.