

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023–

CLASA A V-A

Subiecte

1. Fie numerele  $x = 16^5 : 8^6 + (125^{12} : 25^8) : (5^4)^5 - 7^0$  și

$y = 56 - 34 : [2^9 : (2^7 + 2^7)] - 6^2$ . Arătați că  $2023^x + y^{2023}$  nu este pătrat perfect.

\*\*\*

2. Determinați numerele naturale  $\overline{abcd}$ , scrise în baza 10, știind că la împărțirea acestora la  $\overline{bcd}$  obținem câtul  $3a+1$  și restul  $4a+9$ .

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

3. Pentru orice număr natural  $a_n$ , cu  $n \geq 2$  avem relația  $2a_n = a_{n-1} + 2023$ , iar  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

Arătați că numărul  $A = S_{2024} + a_{2024} - 2a_1$  este pătrat perfect.

Prof. Gheorghe Bumbăcea, Bușteni

4. Determinați numerele naturale  $m$  și  $n$  știind că  $2^{3m} - 2^{3n} = 448$ .

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

**Notă:**

Timp de lucru : 2 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023 –****CLASA A VI A****Subiecte**

1. Aflați toate perechile de numere naturale nenule și distincte  $a, b$  pentru care are loc relația  $5 \cdot (a, b) + 4 \cdot [a, b] = 468$ , unde  $(a, b)$  reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor  $a, b$ , iar  $[a, b]$  reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor  $a, b$ .

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

2. Aflați  $a, b, c$  numere raționale pozitive, știind că  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{c} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{6}$ .

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

3. a. Determinați cele mai mici numere naturale  $m > n > p$  cu proprietatea că numărul  $a = 2^m - 2^n + 2^p$  este pătrat perfect.
- b. Demonstrați că există o infinitate de triplete  $(m, n, p)$  cu proprietatea că  $a = 2^m - 2^n + 2^p$  este pătrat perfect.

Prof. Petre Năchilă, Ploiești

4. Se consideră unghiurile adiacente  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$ ,  $OM$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle AOB$ ,  $ON$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle MOB$ , iar  $OP$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle AON$ . Știind că  $OP \perp OC$  și  $7 \sphericalangle BOC = 10 \sphericalangle MOP$ , determinați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle BOC, \sphericalangle MOP, \sphericalangle AOC$ .

Gazeta Matematică, 2022

**Notă:**

Timp de lucru : 2 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023–

CLASA A VII-A

Subiecte

1. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{\sqrt{77} + \sqrt{165} + \sqrt{105} + 11}{\sqrt{7} + 2\sqrt{11} + \sqrt{15}}$$

Prof. Gheorghe Achim , Mizil

2. Se consideră triunghiul ABC a cărui arie este egală cu  $36\text{ cm}^2$ . Fie punctul D mijlocul laturii AB, iar punctul E este mijlocul segmentului CD și  $BE \cap AC = \{F\}$

- a) Arătați că  $AC=3CF$ ;  
b) Calculați aria triunghiului CEF.

Prof. Negrilă Anton, Ploiești

3. Se consideră triunghiul ABC în care  $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{ACB}$  și  $AD \perp BC$  ( $D \in BC$ ).  
Demonstrați că  $2 \cdot DC = AB + BC$ .

Prof. Gheorghe Bumbăcea, Bușteni

4. Fie numerele  $a = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$  și  $b = \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ . Considerăm suma

$$S_n = 1 + ab + a^2b + a^3b + \dots + a^nb. \text{ Demonstrați că : } \sqrt{2} - \frac{1}{2^n} < S_n < \sqrt{2}.$$

Prof. Petre Năchilă , Ploiești

**Notă:**

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023 –

CLASA A VIII A

## Subiecte

1. Demonstrați că numărul  $N = (a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b) + b^4$ , unde  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , este pătratul altui număr natural.

Prof. Gheorghe Achim, Mizil

2. Determinați numerele reale  $a, b$  pentru care  $\frac{a+b}{2} \leq 3\sqrt{a-9} + 4\sqrt{b-16}$ .

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

3. Se consideră  $ABCD$  un tetraedru regulat și  $M$  aparține laturii  $AC$ .

a. Dacă  $M$  este mijlocul laturii  $AC$ , calculați  $\cos(\angle(BM, CD))$

b. Arătați că, pentru orice punct  $M$  aparținând laturii  $AC$ , raportul  $\frac{\cos(\angle(BM, CD))}{\sin(\angle ABM)}$  are aceeași valoare.

Gazeta Matematică, 2022

4. În tetraedrul  $ABCD$  notăm cu  $E$  și  $F$  proiecțiile punctelor  $A$  respectiv  $B$  pe dreapta  $CD$ ; știm că  $AE = BF$ . Dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$  iar  $MN \perp CD, N \in CD$ , arătați că  $MN \perp AB$ .

Gazeta Matematică, 2022

**Notă:**

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023–

CLASA A IX-A

Subiecte

1. Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 = 2$  și  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Arătați că :

a)  $x_n = n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

b)  $\{\sqrt{x_n}\} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Prof. Roxana Soare , Ploiești

2. Fie  $x, y, z > 0$  cu  $x + y + z = 9$ . Demonstrați că :

$$\frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{3y} + \sqrt{5z}} + \frac{y}{\sqrt{y} + \sqrt{3z} + \sqrt{5x}} + \frac{z}{\sqrt{z} + \sqrt{3x} + \sqrt{5y}} \geq 1$$

Prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

3. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $M, N, P, Q, R$  astfel încât  $M$  este mijlocul lui  $[BC]$ ,  $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PC}$ ,  $Q$  = mijlocul lui  $[AM]$ ,  $R$  = mijlocul lui  $[BQ]$ .

a) Demonstrați că  $RP \parallel BC$  ;b) Demonstrați că  $RP, AM$  și  $CN$  sunt concurente .

Prof. Claudiu Militaru , Ploiești

4. Fie ecuația  $\left[\frac{25x}{4}\right] + \left[\frac{5x}{2}\right] + [x] + \left[\frac{2x}{5}\right] + \left[\frac{4x}{25}\right] + [-10,31x] = 0$ . (S-a notat cu  $[x]$  partea

întreagă a lui  $x$ ). Arătați că ecuația are cel puțin un milion de soluții în intervalul  $(1; 1,01^{10^{10}})$ .

Prof. Emil Vasile , Ploiești

**Notă:**

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023 –

CLASA A X A

Subiecte

1. Arătați că dacă  $a, b, c \in (1, \infty)$  atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{\log_{abc} a}{\log_{abc} (a^4 bc)} + \frac{\log_{abc} b}{\log_{abc} (ab^4 c)} + \frac{\log_{abc} c}{\log_{abc} (abc^4)} \leq \frac{1}{2}.$$

Prof. Roxana Soare, Ploiești

2. a. Studiați monotonia funcției  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

b. Comparați numerele  $a = \log_3 11 - \log_7 2$  și  $b = \log_2 7 - \log_{11} 3$

c. Comparați numerele  $c = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$  și  $c = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt[6]{\sqrt{2} - 1}$

Prof. Gabriel Necula, Ploiești

3. a. Găsiți  $a \in (1, 2)$  astfel încât funcția  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, f(n) = \lfloor a^n \rfloor, \forall n \geq 1$  să fie injectivă.

b. Arătați că funcția  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, f(n) = \lfloor b^n \rfloor, \forall n \geq 1, (b > 1)$  nu este bijectivă.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

4. Fie  $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  și  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ .

Determinați  $|z_1^{2022} + z_2^{2022} + z_3^{2022}|$ .

Gazeta Matematică, 2022

**Notă:**

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023 –

CLASA A XI A

Subiecte

1. Aflați  $X \in M_2(\mathbb{R})$  știind că  $X^{2023} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ .

\*\*\*

2. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Determinați  $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$  care verifică relațiile  $X^4 + XY = I_2, X^2 + XY^2 = YXY + A$ .

Prof. Gabriel Necula, Ploiești

3. Se consideră șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  dat de  $a_1 = 1$  și  $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a. Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ;

b. Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .

Gazeta Matematică, 2022

4. Se consideră șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 2023$ ,  $a_{n+1} = \left(1 + \sqrt[3]{a_n - 1}\right)^2$ ,  $\forall n \geq 1$ .

a. Demonstrați că șirul este convergent.

b. Determinați limita șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

**Notă:**

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023–

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Fie  $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  definim  $f_t : E \rightarrow E$ ,  $f_t(x, y) = \left( x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t \right)$ ,

$\forall (x, y) \in E$ . Pe mulțimea  $G = \{f_t / t \in \mathbb{R}\}$  definim  $(f_t, f_v) \rightarrow f_t \circ f_v$ . Arătați că:

a)  $(G, \circ)$  este grup comutativ ;

b)  $(G, \circ)$  este izomorf cu grupul comutativ  $(\mathbb{R}, +)$ .

\*\*\*

2. Fie  $F = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ continuă și } \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbb{R} \right\}$

a) Arătați că , dacă  $f \in F$ , atunci  $f(0) = 0$ ;

b) Arătați că  $\int_{-2023}^{2023} f(x) \ln(x^2 + 1) dx = \int_{-2023}^{2023} f(x) (e^x + e^{-x}) dx$ .

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

3. Demonstrați că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2x} + 5) \sin x}{e^{2x} \cos x + 2 \sin x + \cos x} dx = \pi$ .

Prof. Claudiu Militaru , Ploiești

4. Dacă  $(G, \cdot)$  este un grup cu elementul neutru  $e$  și dacă  $a, b \in G$  satisfac condițiile:

$b^6 = e$ ,  $ab = b^4 a$ , arătați că  $b^3 = e$  și  $ab = ba$ .

\*\*\*

**Notă:**

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.