

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 18.02.2023
CLASA a XII-a

1. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = xy - a(x + y) + a(a + 1)$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

a) Arătați că $H = (a - 1, a + 1)$ este o parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „ $*$ ” (4p)

b) Demonstrați că $(H, *)$ nu poate forma o structură de grup. (3p)

2. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că (G, \cdot) este grup abelian și că grupurile (G, \cdot) și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe. (7p)

3. Calculați limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \int_n^{2n} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$, $n \geq 1$. (7p)

4. Fie $\in \mathbb{R}, a > 1$. Calculați $\int \frac{x+1-x \ln x \ln(\log_a x)}{x(x+1)^2 \ln x} dx$, $x \in (1, \infty)$ (7p)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se vor scrie rezolvările complete.

Timp de lucru 3 ore.