

**Olimpiada de Matematică–Etapă Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a VIII – a**

Barem de corectare și notare

1. a) Arătați că pentru orice numere reale a și b , are loc egalitatea:

$$9a^2 + 9b^2 - 12a - 48b + 68 = (3a - 2)^2 + (3b - 8)^2.$$

- b) Numerele reale a, b, x, y satisfac relația:

$$\sqrt{9a^2 + 9b^2 - 12a - 48b + 72} + \sqrt{25x^2 + 4y^2 - 20x - 20y + 45} \leq 6.$$

Calculați media aritmetică a mediilor geometrice ale numerelor a și b , respectiv x și y .

Soluție:

a) $9a^2 + 9b^2 - 12a - 48b + 68 = (9a^2 - 12a + 4) + (9b^2 - 48b + 64) = \dots\dots\dots$ **1p**

$= (3a - 2)^2 + (3b - 8)^2. \dots\dots\dots$ **2p**

b) $\sqrt{9a^2 + 9b^2 - 12a - 48b + 72} + \sqrt{25x^2 + 4y^2 - 20x - 20y + 45} =$
 $= \sqrt{(3a - 2)^2 + (3b - 8)^2 + 4} + \sqrt{(5x - 2)^2 + (2y - 5)^2 + 16} \dots\dots\dots$ **1p**

$\sqrt{(3a - 2)^2 + (3b - 8)^2 + 4} + \sqrt{(5x - 2)^2 + (2y - 5)^2 + 16} \geq 2 + 4 = 6 \dots\dots\dots$ **1p**

$a = \frac{2}{3}; b = \frac{8}{3}; x = \frac{2}{5}; y = \frac{5}{2} \dots\dots\dots$ **1p**

$m_g(a, b) = \frac{4}{3}; m_g(x, y) = 1 \Rightarrow m_a = \frac{7}{6} \dots\dots\dots$ **1p**

2. a) Pentru x număr real, descompuneți expresia $x^4 + x^2 + 1$ în produs de doi factori de gradul al doilea.

- b) Determinați toate numerele întregi k , pentru care $k^4 + k^2 + 1$ este număr prim.

Soluție:

a) $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \dots\dots\dots$ **1p**

$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \dots\dots\dots$ **2p**

b) $(k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)$ este număr prim $\Rightarrow k^2 - k + 1 = 1$ sau $k^2 + k + 1 = 1 \dots\dots\dots$ **1p**

Obținem $k \in \{-1, 0, 1\} \dots\dots\dots$ **2p**

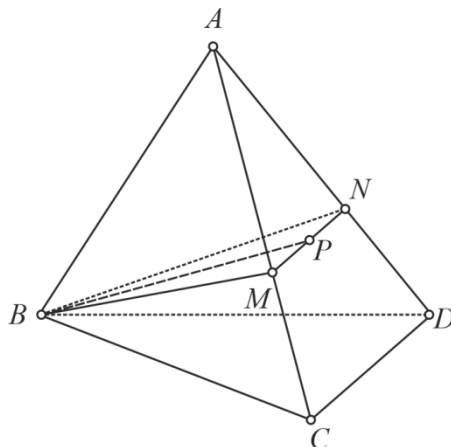
Înlocuind, convin doar $k = \pm 1 \dots\dots\dots$ **1p**

3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și $M \in (AC)$.

a) Dacă M este mijlocul lui (AC) , calculați $\cos(\angle(BM, CD))$.

b) Arătați că, pentru orice $M \in (AC)$, raportul $\frac{\cos(\angle(BM, CD))}{\sin(\angle ABM)}$ are aceeași valoare.

(Gazeta Matematică 11/2022 – Traian Preda, București)



Soluție: Notăm lungimea laturii tetraedrului cu a . Construim $MN \parallel CD$, $N \in (AD)$ și fie P mijlocul segmentului MN .

a) $\angle(BM, CD) = \angle BMN$, MN este linie mijlocie în triunghiul ACD și $MN = \frac{a}{2}$ 1p

$$BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ și } MP = \frac{a}{4} \text{ 1p}$$

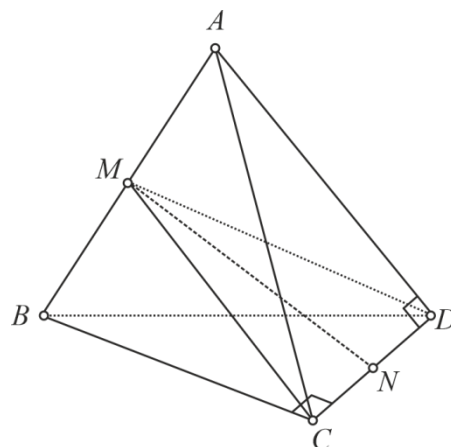
$$\cos(\angle(BM, CD)) = \cos(\angle BMN) = \frac{MP}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 1p}$$

b) $\cos(\angle(BM, CD)) = \cos(\angle BMN) = \frac{MP}{BM} = \frac{\frac{1}{2}MN}{BM} = \frac{MN}{2BM} = \frac{AM}{2BM}$ 1p

$$A_{ABM} = \frac{AB \cdot AM \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{AB \cdot BM \cdot \sin(\angle ABM)}{2} \Rightarrow \sin(\angle ABM) = \frac{AM \cdot \sin 60^\circ}{BM} \dots 2p$$

$$\frac{\cos(\angle(BM, CD))}{\sin(\angle ABM)} = \frac{\frac{AM}{2BM}}{\frac{AM \cdot \sin 60^\circ}{BM}} = \frac{1}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 1p}$$

4. Fie $ABCD$ un tetraedru cu muchiile AD și BC egale și ambele perpendiculare pe CD . De asemenea, fie M mijlocul muchiei AB și N piciorul perpendicularei din M pe CD .
- a) Arătați că $AC = BD$.
- b) Demonstrați că $MN \perp AB$.



Soluție:

- a) $\triangle ADC \equiv \triangle BCD$ (C.C.) $\Rightarrow AC = BD$ **3p**
- b) $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ (L.L.L.) $\Rightarrow \angle ABC \equiv \angle BAD$ **1p**
- $\triangle BCM \equiv \triangle ADM$ (L.U.L.) $\Rightarrow MC = MD \Rightarrow N$ este mijlocul segmentului CD **1p**
- $\triangle ADN \equiv \triangle BCN$ (C.C.) $\Rightarrow NA = NB \Rightarrow \triangle ANB$ isoscel **1p**
- NM este mediană în triunghiul isoscel $ANB \Rightarrow MN \perp AB$ **1p**