

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a X- a

Barem de corectare

1. Demonstrați că $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}} = 2$ dacă și numai dacă $a \in \{-5, 5\}$.

Soluție: Fie $x = \sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}}$. Avem:

$$x^3 = 7 - a\sqrt{2} + 7 + a\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(7-a\sqrt{2})(7+a\sqrt{2})} \cdot x \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$x^3 - 3\sqrt[3]{49-2a^2} \cdot x - 14 = 0 \quad \dots\dots\dots (1p)$$

$$“\Rightarrow” \quad x = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{49-2a^2} = -1 \Rightarrow a = \pm 5 \quad \dots\dots\dots (1p)$$

$$“\Leftarrow” \quad a = \pm 5 \Rightarrow x^3 + 3x - 14 = 0 \quad \dots\dots\dots (1p)$$

$$(x-2)(x^2+2x+7) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \dots\dots\dots (2p)$$

2. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \log_{bc} a$, $y = \log_{ca} b$, $z = \log_{ab} c$.

Arătați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6$.

$$\textbf{Soluție: } \frac{1}{x} = \log_a b + \log_a c \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$\log_a b + \log_b a \geq 2 \quad \dots\dots\dots (2p)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = (\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + \log_c a) + (\log_c b + \log_b c) \geq 6 \quad \dots\dots\dots (3p)$$

3. Fie funcția $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care verifică relația

$$\sqrt{g(x)} + g(x) = x^2, (\forall) x \in [0, +\infty),$$

a) Arătați că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x} + x$ este bijectivă.

b) Arătați că funcția g este bijectivă;

c) Calculați $g^{-1}(1)$.

Soluție:

a) f strict crescătoare ca sumă a două funcții strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă... (1p)

f este surjectivă dacă $(\forall) y \in [0, +\infty)$ există $x \in [0, +\infty)$ astfel încât $f(x) = y$;

$$\sqrt{x} + x = y \Rightarrow t^2 + t - y = 0, \text{ unde } t = \sqrt{x}; \Delta = 1 + 4y \geq 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}; \text{ convine } t = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \geq 0 \Rightarrow \text{există } x = t^2 \geq 0. \quad \dots\dots\dots (2p)$$

b) Funcția $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $h(x) = x^2$ este bijectivă (1p)

Relația $\sqrt{g(x)} + g(x) = x^2$ devine $f(g(x)) = h(x)$ (1p)

$g = f^{-1} \circ h$ este bijectivă (1p)

c) Fie $g(x_0) = 1 \Rightarrow \sqrt{1} + 1 = x_0^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{2} \geq 0 \Rightarrow g^{-1}(1) = \sqrt{2}$ (1p)

4. Considerăm numerele complexe z_1, z_2, z_3 , cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Determinați $|z_1 + z_2 + z_3|$.

Soluție: $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$ (2p)

$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = \left| 2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \right| = 2|z_1 + z_2 + z_3|$ (3p)

$|z_1 + z_2 + z_3| \in \{0, 2\}$ (2p)