

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a X- a

1. Demonstrați că $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}} = 2$ dacă și numai dacă $a \in \{-5, 5\}$.

Supliment Gazeta Matematică 10/2022

2. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \log_{bc} a$, $y = \log_{ca} b$, $z = \log_{ab} c$.

Arătați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6$.

3. Fie funcția $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care verifică relația

$$\sqrt{g(x)} + g(x) = x^2, (\forall)x \in [0, +\infty).$$

- a) Arătați că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x} + x$ este bijectivă.
b) Arătați că funcția g este bijectivă;
c) Calculați $g^{-1}(1)$.
4. Considerăm numerele complexe z_1, z_2, z_3 , cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.
Determinați $|z_1 + z_2 + z_3|$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru -3 ore.