

**Olimpiada Națională de Matematică 2023****Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023****Clasa a X-a**

**Problema 1.** Determinați  $z \in \mathbb{C}$  astfel încât  $5z^2 - z \in \mathbb{R}$  și  $5z^2 - z \leq 4$ .

*Supliment Gazeta Matematică nr 10/2022*

**Problema 2.** Rezolvați în intervalul  $(0, \infty)$  ecuația  $\sqrt{25 - x^{\lg 9}} + 3^{\lg x} = 7$ .

**Problema 3.** Fie  $a \in (1, \infty)$  și funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left(\frac{a+1}{a}\right)^x - \frac{1}{a^x} - 1$ .

a) Arătați că funcția  $f$  este injectivă.

b) Fie  $n \geq 2$  un număr natural. Rezolvați ecuația  $(x+n)^{\log_n(n+1)} = 1 + (x+n+1)^{\log_{n+1}n}$ .

**Problema 4.**

a) Considerăm numerele complexe  $a$  și  $b$  de același modul. Știind că  $|2a+3b| = |b+4a|$ , arătați că  $a = b$ .

b) Considerăm numerele complexe  $a$ ,  $b$  și  $c$  de același modul. Știind că  $|2a+3b| = |2b+3c| = |2c+3a|$ , arătați că triunghiul cu vârfurile în punctele de afixe  $a$ ,  $b$  și  $c$  este echilateral.

*Timp de lucru: 3 ore*

*Fiecare problemă este notată cu 7p*