



Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapă locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a V-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1. Vom numi un număr natural nenul n , *interesant*, dacă adunând 5 la una dintre cifrele sale, se obține triplul numărului n . Determinați câte numere *interesante* de cel mult trei cifre există.

Soluție: A aduna 5 la cifra unităților înseamnă a aduna 5 la numărul inițial. A aduna 5 la cifra zecilor înseamnă a aduna 50 la numărul inițial. A aduna 5 la cifra sutelor înseamnă a aduna 500 la numărul inițial.

Analizăm 3 cazuri:

1. Dacă n este număr de o cifră, $n = a$, atunci $3a = 2a + 5 \Rightarrow 2a = 5$ (Nu convine)2p
2. Dacă n este număr de două cifre, $n = \overline{ab}$, atunci avem situațiile :
 - $3 \cdot \overline{ab} = \overline{ab} + 5 \Rightarrow 2 \cdot \overline{ab} = 5$ (Nu convine)
 - $3 \cdot \overline{ab} = \overline{ab} + 50 \Rightarrow \overline{ab} = 25$ 2p
3. Dacă n este un număr de trei cifre, $n = \overline{abc}$, avem situațiile :
 - $3 \cdot \overline{abc} = \overline{abc} + 5 \Rightarrow 2 \cdot \overline{abc} = 5$ (Nu convine)
 - $3 \cdot \overline{abc} = \overline{abc} + 50 \Rightarrow \overline{abc} = 25$ (Nu convine)
 - $3 \cdot \overline{abc} = \overline{abc} + 500 \Rightarrow \overline{abc} = 250$ 3p

Finalizare $n \in \{25, 250\}$.

Problema 2. Se dau numerele $a_1 = 4$, $a_2 = a_1 + 3 \cdot 4$, $a_3 = a_2 + 3 \cdot 4^2$, ..., $a_{99} = a_{98} + 3 \cdot 4^{98}$.

- a) Determinați a_5 .
- b) Comparați a_{99} cu 3^{132} .
- c) Arătați că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99} = 2^{9900}$.

Soluție:

- a) $a_5 = a_4 + 3 \cdot 4^4 = a_3 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 = a_2 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 = a_1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 =$
 $= 4 + 3 \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + 4^4) = 4 + (4 - 1) \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + 4^4) = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 - 4 - 4^2 - 4^3 - 4^4 = 4^5$
 $\Rightarrow a_5 = 4^5 = 1024$ 3p
- b) $a_{99} = 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \dots + 3 \cdot 4^{98} = 4 + (4 - 1)(4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98}) =$
 $= 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99} - 4 - 4^2 - 4^3 - \dots - 4^{98} = 4^{99}$ 1p
 $4^{99} = 2^{198} = (2^3)^{66} = 8^{66}$, iar $3^{132} = (3^2)^{66} = 9^{66} \Rightarrow a_{99} < 3^{132}$ 1p
- c) $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99} = 4 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \dots \cdot 4^{99} = 4^{1+2+3+\dots+99} = (2^2)^{99 \cdot 100 : 2} = 2^{9900}$ 2p

Obs: Dacă observă, fără să demonstreze, că $a_n = 4^n$ și folosește acest lucru în rezolvarea b) și c), din punctajul total se scade 1p.



Problema 3. O fermă viticolă a distribuit cantitatea de struguri în trei centre viticole astfel: primul centru a luat $\frac{1}{3}$ din cantitatea totală și încă 16 tone, al doilea centru a luat $\frac{1}{3}$ din ce a mai rămas și încă 16 tone, cel de-al treilea centru a luat $\frac{1}{3}$ din ce a mai rămas și încă 16 tone de struguri. Ce cantitate de struguri a revenit fiecărui centru de vinificație?

Soluție: Notăm cu x cantitatea totală de struguri.

Centrul 1 primește $\frac{1}{3} \cdot x + 16$ (rest R_1), centrul 2 primește $\frac{1}{3} \cdot R_1 + 16$ (rest R_2), centrul 3 primește $\frac{1}{3} \cdot R_2 + 16$..1p

16 tone reprezintă $\frac{2}{3}$ din $R_2 \Rightarrow R_2 = 24$ tone. Centrul 3 primește 24 tone de struguri2p

$24 + 16 = 40$ tone reprezintă $\frac{2}{3}$ din $R_1 \Rightarrow R_1 = 60$ tone. Centrul 2 primește $16 + 20 = 36$ tone2p

$16 + 60 = 76$ tone reprezintă $\frac{2}{3}$ din $x \Rightarrow x = 114$ tone.

Centrul 1 primește $38 + 16 = 54$ tone de struguri2p

Problema 4. Se aranjează numerele $2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{10}$ într-un tabel cu 3 linii și 3 coloane astfel încât, pe fiecare coloană, produsul celor două numere de deasupra să fie egal cu numărul de jos (de pe ultima linie).

- Care este produsul numerelor de pe ultima linie?
- Dați un exemplu de aranjare a numerelor în tabel.
- Câte soluții are problema? Justificați!

Soluție:

a) Produsul numerelor din tabel este $2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{10} = 2^{54}$ 1p

Produsul numerelor de pe ultima linie este 2^{27} 1p

b) Un exemplu de aranjare2p

(orice alt exemplu corect este punctat tot cu 2p)

2^2	2^4	2^3
2^6	2^5	2^7
2^8	2^9	2^{10}

c) Avem două configurații care verifică datele problemei:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^8 = 2^2 \cdot 2^6 \\ 2^9 = 2^4 \cdot 2^5 \\ 2^{10} = 2^3 \cdot 2^7 \end{array} \right., \text{ respectiv } \left\{ \begin{array}{l} 2^8 = 2^3 \cdot 2^5 \\ 2^9 = 2^2 \cdot 2^7 \\ 2^{10} = 2^4 \cdot 2^6 \end{array} \right. \dots\dots\dots 1p$$

În cazul primei configurații putem aranja 2^2 și 2^6 în 2 moduri, 2^4 și 2^5 în 2 moduri, 2^3 și 2^7 în 2 moduri. Cele 3 coloane le putem aranja în $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ moduri. Prin urmare, prima configurație generează $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ de soluții.1p

A doua configurație generează tot 48 de soluții. Problema admite $48 + 48 = 96$ de soluții.1p