

BAREM ORIENTATIV DE NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală- 2023
CLASA a V-a

PROBLEMA 1

a) Suma a trei numere naturale este 110. Aflați numerele, știind că dacă împărțim al doilea număr la primul se obține câtul 2 și restul 2, iar dacă împărțim al treilea număr la al doilea obținem câtul 3 și restul 3.

b) Doi frați au vârstele exprimate prin numere naturale impare consecutive. Dacă suma vârstelor celor doi frați este egală cu predecesorul pătratului lui 5, aflați vârsta fratelui mai mic.

Soluție:

a) $a+b+c=110$
 $b=2a+2$
 $c=3b+3=3\cdot(2a+2)+3 = 6a+9$**2p**

$9a+11=110 \Rightarrow a=11$
 $b=2\cdot 11+2=24$
 $c=3\cdot 24+3=75$**2p**

b) $2a+1+2a+3 = 25-1=24$ **1p**

$4a=20 \Rightarrow a=5$ **1p**

$2a+1=11$ **1p**

PROBLEMA 2

Calculați $4a+9b+5c$ știind că $a+b = 5^3 - 5^2$ și $b+c = 4^3 + 4^2$.

Soluție:

$$a+b = 125 - 25 = 100 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$b+c = 64+16 = 80 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$4a+9b+5c = 4a+4b+5b+5c \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$4a + 4b = 400 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$5b + 5c = 400 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$4a+9b+5c = 400+400 = 800 \quad \dots\dots\dots 1p$$

PROBLEMA 3

Numim număr „preferat” orice număr natural de patru cifre nenule diferite, care are proprietatea că produsul cifrelor sale este pătrat perfect.

- Scrieți două numere „preferate” care au ultima cifră 2.
- Câte numere „preferate” există?
- Stabiliți dacă suma tuturor numerelor „preferate” este pătrat perfect?

Soluție:

- 1362 și 3612 sunt numere „preferate” pentru că $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 = 6^2 \quad \dots\dots 2p$

- Cu cifrele 1;2;3 și 6 sunt 24 de numere „preferate”

1236, 1263, 1326, 1362, 1623, 1632 – 6 numere

2136, 2163, 2316, 2361, 2613, 2631 – 6 numere

3126, 3162, 3216, 3261, 3612, 3621 – 6 numere

6123, 6132, 6213, 6231, 6312, 6321 – 6 numere

Cu cifrele 1;2;4;8 sunt 24 de numere „preferate”

Cu cifrele 1;2;8;9 sunt 24 de numere „preferate”

Cu cifrele 1;3;6;8 sunt 24 de numere „preferate”

Cu cifrele 2;4;8;9 sunt 24 de numere „preferate”

Cu cifrele 2;3;6;9 sunt 24 de numere „preferate”

$24 \cdot 6 = 144$ numere „preferate” $\dots\dots\dots 3p$

c) Calculând ultima cifră a sumei observăm că:

$$U[6(1+2+3+6)] = 2$$

$$U[6(1+2+4+8)] = 0$$

$$U[6(1+2+8+9)] = 0$$

$$U[6(1+3+6+8)] = 8$$

$$U[6(2+4+8+9)] = 8$$

$$U[6(2+3+6+9)] = 0$$

Deci ultima cifră a sumei este 8 \Rightarrow suma nu este pătrat perfect.2p

PROBLEMA 4

Considerăm $x = 3^{101} \cdot 3^{102} \cdot 3^{103} \cdot \dots \cdot 3^{200}$ și $y = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{15049}$

Comparați x și $2y + 1$.

(G.M)

Soluție:

$$x = 3^{101+102+\dots+200} \dots\dots\dots 1p$$

$$x = 3^{1+2+\dots+200-(1+2+\dots+100)} \dots\dots\dots 1p$$

$$x = 3^{(200 \cdot 201) : 2 - (100 \cdot 101) : 2} = 3^{100 \cdot 201 - 50 \cdot 101} = 3^{20100 - 5050} = 3^{15050} \dots\dots\dots 1p$$

$$3y = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{15049} + 3^{15050} \dots\dots\dots 1p$$

$$y = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{15049}$$

(-)

$$2y = 3^{15050} - 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$2y + 1 = 3^{15050} \Rightarrow x = 2y + 1 \dots\dots\dots 1p$$