

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - CLASA A XII-A**

**SUBIECTUL 1**

Pe mulțimea  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  se definește operația  $(a, b) * (c, d) = (ac + 5bd, ad + bc)$ .

Se consideră mulțimea  $S = \{(u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid u^2 - 5v^2 = 1\}$ .

a) Calculați  $\underbrace{(9, 4) * (9, 4) * \dots * (9, 4)}_{n \text{ ori}}, n \geq 1$ .

b) Arătați că  $S$  are o infinitate de elemente.

*Carmen și Viorel Botea, Brăila*

**SUBIECTUL 2**

Fie funcția  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2}$ .

Dacă funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ , iar funcția  $F_1$  este o primitivă a funcției  $F$  și  $F(0) = F_1(0) = 0$ , determinați funcția  $F_1$ .

*George-Florin Șerban, Brăila*

**SUBIECTUL 3**

Calculați  $\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{8 + \sin^2 x} dx$ .

*Carmen și Viorel Botea, Brăila*

**SUBIECTUL 4**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup necomutativ și  $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \text{ oricare ar fi } y \in G\}$ , centrul său.

Dacă  $a$  și  $b$  sunt două elemente din  $G$  cu proprietatea că  $acb = bca$ , pentru orice  $c \in G \setminus Z(G)$  demonstrați că  $ab = ba$ .

*Gazeta Matematică*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Nu se acordă puncte din oficiu.