



Olimpiada Națională de Matematică
Județul ALBA - etapa locală - 11 februarie, 2023

Clasa a X-a

Problema 1.

Se consideră numerele reale $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că:

$$\log_{ab^3c^2}(ab) + \log_{bc^3a^2}(bc) + \log_{ca^3b^2}(ca) \geq 1.$$

Problema 2.

a) Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu $|a| = |b| = |c| = R > 0$. Să se arate că:

$$|-2a + b + c| + |a - 2b + c| + |a + b - 2c| \leq 9R,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a + b + c = 0$.

b) În triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB . Dacă $AM + BN + CP = \frac{9R}{2}$, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

Problema 3.

Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, cu $|a| = |b| = |c|$. Să se arate că dacă ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are cel puțin o rădăcină de modul egal cu 1, atunci $b^2 = ac$.

Problema 4.

Să se determine funcțiile $f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care au proprietatea că:

$$(\forall) x, y, z \in (0, \infty) \text{ avem } f(x, y) = f(y, x) \text{ și } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{x+y}{f(x, y)} + \frac{y+z}{f(y, z)} + \frac{z+x}{f(z, x)}.$$

Gazeta Matematică

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.