



Olimpiada Națională de Matematică  
Județul ALBA - etapa locală - 11 februarie, 2023

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a X-a**

**Problema 1.**

Se consideră numerele reale  $a, b, c \in (1, \infty)$ . Să se arate că:

$$\log_{ab^3c^2}(ab) + \log_{bc^3a^2}(bc) + \log_{ca^3b^2}(ca) \geq 1.$$

**Soluție și barem:**

- $\log_{ab^3c^2}(ab) = \frac{\lg a + \lg b}{\lg a + 3\lg b + 2\lg c} = \frac{\lg a + \lg b}{\lg a + \lg b + 2(\lg b + \lg c)}$  ..... 2p
- Notăm  $\lg a + \lg b = x, \lg b + \lg c = y, \lg c + \lg a = z; x, y, z > 0$  ..... 1p
- $E = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x}$  ..... 1p
- $E = \frac{x^2}{x^2+2xy} + \frac{y^2}{y^2+2yz} + \frac{z^2}{z^2+2zx}$  și utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz, rezultă  $E \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}$  ..... 2p
- $E \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2} \Rightarrow E \geq 1$  ..... 1p

**Problema 2.**

a) Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}$  cu  $|a| = |b| = |c| = R > 0$ . Să se arate că:

$$|-2a + b + c| + |a - 2b + c| + |a + b - 2c| \leq 9R,$$

cu egalitate dacă și numai dacă  $a + b + c = 0$ .

b) În triunghiul  $ABC$  înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , punctele  $M, N, P$  sunt mijloacele laturilor  $BC, AC$ , respectiv  $AB$ . Dacă  $AM + BN + CP = \frac{9R}{2}$ , să se arate că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

**Soluție și barem:**

- a) • Notăm  $z = a + b + c$  și inegalitatea devine:  
 $|z - 3a| + |z - 3b| + |z - 3c| \leq 9R$  ..... 1p
- Utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz, obținem:  
 $(|z - 3a| + |z - 3b| + |z - 3c|)^2 \leq 3(|z - 3a|^2 + |z - 3b|^2 + |z - 3c|^2)$  și prin  
 calcul obținem  $(|z - 3a| + |z - 3b| + |z - 3c|)^2 \leq 3(3|z|^2 - 3z\bar{z} - 3\bar{z}z + 27R^2)$  .... 2p
- Rezultă  $(|z - 3a| + |z - 3b| + |z - 3c|)^2 \leq 81R^2 - 9|z|^2 \leq 81R^2$  și de aici,  
 $|z - 3a| + |z - 3b| + |z - 3c| \leq 9R$ , cu egalitate  $\Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$  ..... 1p
- b) • Considerăm reperul cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$  și  
 $a, b, c \in \mathbb{C}$  afixele vârfurilor  $A, B, C$ . Avem  $|a| = |b| = |c| = R$  ..... 1p
- Egalitatea din ipoteză devine:  $|-2a + b + c| + |a - 2b + c| + |a + b - 2c| = 9R$  ..... 1p
- Din punctul a) avem egalitate  $\Leftrightarrow a + b + c = 0$ , adică ortocentrul triunghiului  $ABC$   
 coincide cu centrul cercului circumscris, deci triunghiul  $ABC$  este echilateral ..... 1p

**Problema 3.**

Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ , cu  $|a| = |b| = |c|$ . Să se arate că dacă ecuația  $az^2 + bz + c = 0$  are cel puțin o rădăcină de modul egal cu 1, atunci  $b^2 = ac$ .

**Soluție și barem:**

- $|a| = |b| = |c| = R$ ; din relațiile lui Viete, avem:  $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ ; .....1p
- $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \underbrace{|z_1|}_1 \cdot |z_2| = \frac{|c|}{|a|} = \frac{R}{R} = 1 \Rightarrow |z_2| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$ ..... 2p
- $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}, \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$  .....1p
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{\overline{b}}{\overline{a}} \Rightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -\frac{\frac{R^2}{b}}{\frac{R^2}{a}} \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = -\frac{a}{b}$ .....2p
- $\frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = -\frac{a}{b} \Rightarrow -\frac{\frac{b}{c}}{\frac{c}{a}} = -\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = ac$ .....1p

**Problema 4.**

Să se determine funcțiile  $f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  care au proprietatea că:

$$(\forall) x, y, z \in (0, \infty) \text{ avem } f(x, y) = f(y, x) \text{ și } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{x+y}{f(x, y)} + \frac{y+z}{f(y, z)} + \frac{z+x}{f(z, x)}.$$

Gazeta Matematică

**Soluție și barem:**

- Pentru  $x = y = z$  rezultă  $\frac{3}{2x} = \frac{6x}{f(x, x)} \Rightarrow f(x, x) = 4x^2$  ..... 2p
- Pentru  $z = y$  rezultă  $\frac{2}{x+y} + \frac{1}{2y} = \frac{x+y}{f(x, y)} + \frac{2y}{f(y, y)} + \frac{y+x}{f(y, x)}$  ..... 2p
- $f(y, y) = 4y^2$  și  $f(y, x) = f(x, y) \Rightarrow \frac{2}{x+y} + \frac{1}{2y} = \frac{2(x+y)}{f(x, y)} + \frac{1}{2y}$  .....1p
- Obținem  $f(x, y) = (x + y)^2, (\forall) x, y \in (0, \infty)$ .....1p
- Verificarea condiției din enunț .....1p