



Olimpiada Națională de Matematică  
Județul ALBA - etapa locală -11 februarie, 2023

**Clasa a XI-a**

**Problema 1.**

Se consideră determinantul de ordin  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

- a) Calculați  $D_1$  și  $D_2$ ;
- b) Calculați  $D_n$

**Problema 2.**

- a) Fie  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Arătați că  $\det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A, \forall x \in \mathbb{C}$ .
- b) Dacă  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  cu  $\text{Tr}A = n$  și  $\det A = n + 1, n \in \mathbb{N}^*$ , demonstrați că:  
 $\det(A^2 + (n - 1)I_2) + \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + (n + 1)I_2) = 4$ .

**Problema 3.**

Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale definit prin:  $a_1 = \sqrt{2023}$ , și  $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2023}{2024}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Arătați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este monoton și  $1 \leq a_n \leq 2023, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ;
- b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$ .

**Problema 4.**

Calculați următoarea limită:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \lg \frac{20^{n+1} + 3}{2^{n+1} + 5} \right)$ .

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*