

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - VRANCEA

9 februarie 2025

CLASA a XI-a

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1.

a) Prin inducție sau calcul direct se obține $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \alpha^n - \beta^n \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ (3p)

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $X^{2025} \cdot X = X \cdot X^{2025}$ se obține $\begin{cases} c = 0 \\ a = b + d \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix}$ (2p)

Din a) se obține $X^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n - d^n \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$

Ecuția $X^{2025} = \begin{pmatrix} 2025 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ devine $\begin{cases} a^{2025} = 2025 \\ d^{2025} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt[2025]{2025} \\ d = 1 \end{cases}$ (1p)

Atunci $X = \begin{pmatrix} \sqrt[2025]{2025} & \sqrt[2025]{2025} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1p)

SUBIECTUL 2.

a) Prin calcul se verifică egalitatea (3p)

b) $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ (1p)

$\det(A^2 + B^2) = 0 \Rightarrow \det(A + iB) = 0$ sau $\det(A - iB) = 0$ (1p)

Din a) avem $\det(A + iB) = 0 \Leftrightarrow (\det(A) - \det(B)) + (Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(A \cdot B)) \cdot i = 0$

$\det(A - iB) = 0 \Leftrightarrow (\det(A) - \det(B)) - (Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(A \cdot B)) \cdot i = 0$ (1p)

Cum $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ rezultă că $Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(A \cdot B) = 0 \Leftrightarrow Tr(A) \cdot Tr(B) = Tr(A \cdot B)$ (1p)

SUBIECTUL 3.

a) $x_{2n+2} = \frac{x_{2n+1} + 20}{10} = \frac{x_{2n} + 230}{100}$ (1p)

Prin inducție se demonstrează că $(x_{2n})_{n \geq 0}$ este crescător și $2 \leq x_{2n} \leq \frac{230}{99}$ (2p)

Conform teoremei lui Weierstrass $(x_{2n})_{n \geq 0}$ este convergent (1p)

Trecând la limită în relația $x_{2n+2} = \frac{x_{2n} + 230}{100}$ se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \frac{230}{99}$ (1p)

b) Din $x_{2n+2} = \frac{x_{2n+1} + 20}{10} \Rightarrow x_{2n+1} = 10 \cdot x_{2n+2} - 20$ (1p)

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = 10 \cdot \frac{230}{99} - 20 = \frac{320}{99}$ și de aici $(x_n)_{n \geq 0}$ nu este convergent. (1p)

SUBIECTUL 4.

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{3x+1} - 1}{x} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1} + 1)} - \frac{3x}{x(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1)} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1} - \frac{3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1} = \frac{2}{2} - \frac{3}{3} = 0 \end{aligned} \quad (3p)$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2x+1} - (x+1)}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{3x+1} - (x+1)}{x^2} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x^2}{x^2(\sqrt{2x+1} + 1)} - \frac{x^2(-x-3)}{x^2(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{(3x+1)}(x+1) + (x+1)^2)} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{\sqrt{2x+1} + 1} + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{(3x+1)}(x+1) + (x+1)^2} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3p)$$

$$L_{2025} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^{2025}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2} \cdot \frac{1}{x^{2023}} = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty \quad (1p)$$