

## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- clasa a X-a  
9 februarie 2025

### Subiectul I

Demonstrați că

$$a^{\sqrt{\log_a b} + \sqrt{\log_a c}} + b^{\sqrt{\log_b c} + \sqrt{\log_b a}} + c^{\sqrt{\log_c a} + \sqrt{\log_c b}} \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

pentru oricare  $a, b, c \in (1, \infty)$ .

### Subiectul al II-lea

Demonstrați că  $|z_1|^2 + |z_2|^2 + 1 \geq 2 \cdot \operatorname{Re}(z_1 + z_2 - z_1 z_2)$ , oricare ar fi  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

### Subiectul al III-lea

Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , oricare două diferite, astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_2 + z_3 - z_1|$ .

Demonstrați că  $z_2 + z_3 = 0$ .

(S.G.M. noiembrie 2024)

### Subiectul al IV-lea

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $(f \circ f)(x) = x^5$ , pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ .

- Demonstrați că  $f$  este funcție bijectivă.
- Demonstrați că există  $x_0 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x_0) = x_0$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.

Timp de lucru: 3 ore