

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Locală, Satu Mare, 8 februarie 2025**  
**CLASA a VIII-a**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Problema 1.**

- a) Să se determine toate perechile de numere întregi  $(x, y)$  dacă  
 $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - |x + 2|$ , cu  $x \in (-2, 3)$ .  
 b) Aflați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care  $a^2 + b^2 + 4a - b + 4,25 = 0$ .

item	Rezolvare	Punctaj
a)	Dacă $x \in (-2, 3) \Rightarrow -2 < x < 3 \Rightarrow x + 2 > 0$ și $x - 3 < 0$	1p
	$\Rightarrow  x + 2  = x + 2$ și $ x - 3  = -x + 3$	1p
	Atunci $y = -2x + 1$	1p
	Dacă $x$ întreg din $(-2, 3) \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, 2\} \Rightarrow (-1, 3), (0, 1), (1, -1)$ și $(2, -3)$	1p
b)	$(a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2) + \left(b^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 4 - \frac{1}{4} + 4,25 = 0$	1p
	$(a + 2)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a + 2 = 0$ și $b - \frac{1}{2} = 0$	1p
	$\Rightarrow a = -2, b = \frac{1}{2}$	1p

**Problema 2.** Se consideră expresia algebrică  $E(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+6x+8} + \frac{1}{4-x^2} \cdot \frac{x^2-6x+8}{x^2-16}\right) + \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{-2}$ ,

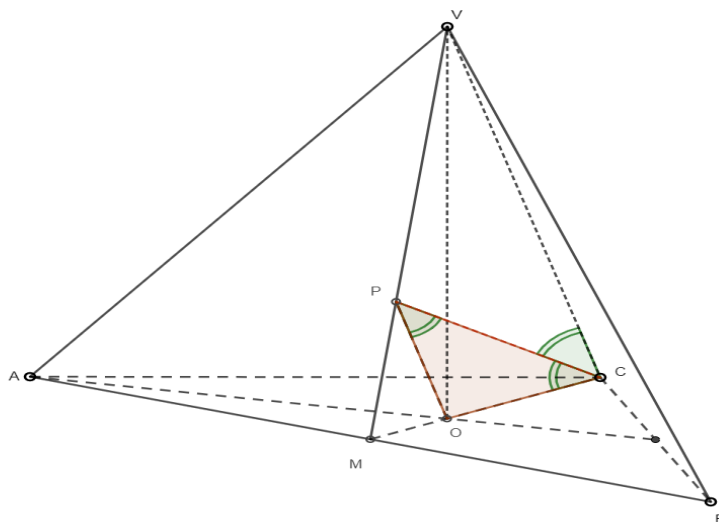
unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 1, 2, 4\}$

- a) Demonstrați că  $E(x) = 1 - \frac{9x+11}{x^2+8x+16}$ .  
 b) Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $E(x)$  este supraunitară.

item	Rezolvare	Punctaj
a)	$E(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 8x + 16}$	3p
	$E(x) = \frac{x^2 + 8x + 16 - 9x - 11}{x^2 + 8x + 16} = 1 - \frac{9x + 11}{x^2 + 8x + 16}$	1p
b)	$E(x) = 1 - \frac{9x+11}{x^2+8x+16} > 1$ , deci $\frac{9x+11}{x^2+8x+16} < 0$ .	1p
	Dar $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ , deci este pozitiv, de unde se obține $9x + 11 < 0$ .	1p
	Deci $\in (-\infty, -\frac{11}{9}) \setminus \{-4, -2\}$ .	1p

**Problema 3.**

Se consideră piramida triunghiulară regulată  $VABC$  cu vârful în  $V$  și  $O$  centrul bazei  $ABC$ . Fie  $M$  mijlocul muchiei  $AB$  și  $CP$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle VCM$ ,  $P$  un punct pe segmentul  $VM$ . Arătați că  $OP = 2OM$  dacă și numai dacă  $VA = AB\sqrt{3}$ .

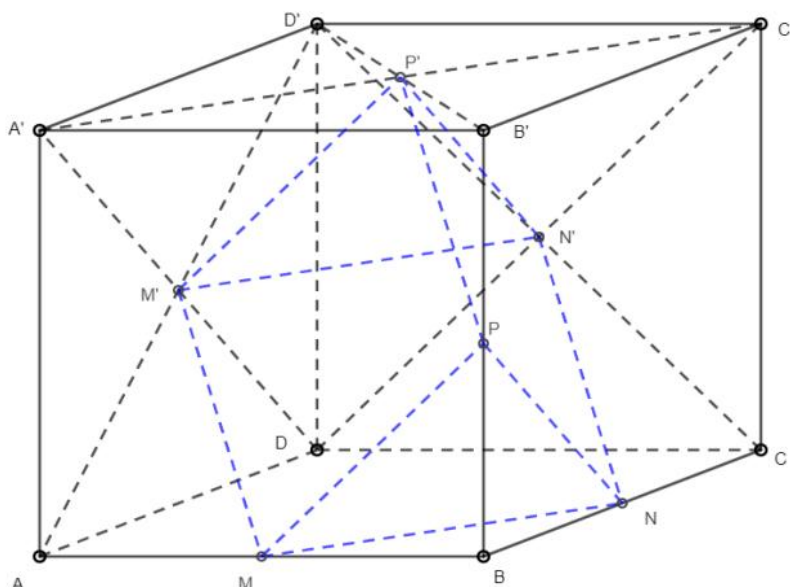


item	Rezolvare	Punctaj
	<p><b>Implicația directă.</b></p> <p>Din <math>OP = 2OM</math>, <math>O</math> centrul de greutate al bazei <math>ABC</math> rezultă că <math>2OM = OC</math>, deci <math>OP = OC</math>, sau triunghiul <math>OPC</math> este isoscel de bază <math>PC</math>.</p>	1p
	<p>Deducem imediat că <math>\sphericalangle OPC \equiv \sphericalangle OCP</math>, dar din ipoteza problemei <math>\sphericalangle OCP \equiv \sphericalangle PCV</math>, așadar din tranzitivitate <math>\sphericalangle OPC \equiv \sphericalangle PCV</math>, sau unghiurile alterne interne determinate de secanta <math>PC</math> cu dreptele <math>OP</math> și <math>CV</math>, sunt congruente, deci dreapta <math>OP</math> este paralelă cu dreapta <math>CV</math>.</p>	1p
	<p>În triunghiul <math>MCV</math> cu <math>OP</math> paralelă cu <math>CV</math> din Teorema lui Thales deducem <math>MO/OC = MP/PV</math>.</p>	1p
	<p>Dar din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul <math>VCM</math> avem că <math>MP/PV = MC/CV</math> deci concluzionăm că <math>MO/OC = MC/CV</math> adică <math>MC/CV = 1/2</math>. Avem deci <math>CV = 2MC = AB\sqrt{3}</math>.</p>	1p
	<p><b>Implicația inversă.</b></p> <p>Din <math>CV = AB\sqrt{3}</math>, rezultă că <math>VC = 2MC</math>, deci <math>MC/CV = 1/2</math> dar din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul <math>VCM</math>, pentru <math>CP</math> bisectoare, avem că <math>MC/VC = MP/PV</math> deci <math>MP/PV = MO/OC</math>.</p>	1p
	<p>Acum din reciproca teoremei lui Thales aplicată în triunghiul <math>VMC</math>, cu <math>MO/OC = MP/PV</math> avem că dreptele <math>OP</math> și <math>VC</math> sunt paralele.</p>	1p
	<p>Pentru aceste două drepte paralele, <math>OP</math> și <math>CV</math> cu secanta <math>CP</math> avem congruența unghiurilor alterne interne <math>\sphericalangle OPC</math> și <math>\sphericalangle PCV</math>, dar <math>\sphericalangle PCO \equiv \sphericalangle VCP</math> din ipoteză, deci triunghiul <math>POC</math> este isoscel cu <math>PO = OC = 2OM</math>.</p>	1p

#### Problema 4.

Fie  $ABCD A'B'C'D'$  un paralelipiped dreptunghic. Notăm mijloacele muchiilor  $AB$ ,  $BC$  respectiv  $BB'$  cu  $M$ ,  $N$ ,  $P$  iar centrele fețelor  $ADD'A'$ ,  $DCC'D'$  respectiv  $A'B'C'D'$  cu  $M'$ ,  $N'$  respectiv  $P'$ . Demonstrați

că dacă prisma triunghiulară  $MNPM'N'P'$  este regulată, atunci paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$  este cub.



item	Rezolvare	Punctaj
	<p>Știm că <math>ABCD A'B'C'D'</math> este paralelipiped dreptunghic, prisma triunghiulară <math>MNPM'N'P'</math> este regulată și vrem să arătăm că <math>ABCD A'B'C'D'</math> este cub.</p> <p>Triunghiurile <math>MBP</math> și <math>NBP</math> sunt congruente în cazul IC deoarece unghiurile <math>\sphericalangle MBP</math> și <math>\sphericalangle NBP</math> sunt drepte, <math>PB</math> este o catetă comună iar ipotenuzele <math>MP</math> și <math>NP</math> sunt congruente ca laturi ale bazei <math>MNP</math>, triunghi echilateral, a prisme triunghiulare regulate <math>MNPM'N'P'</math>.</p>	2p
	Deci $MB = BN$ , egalitate care înmulțită cu 2 dă $AB = BC$ , sau lungimea egală cu lățimea paralelipipedului.(*)	1p
	Comparăm acum triunghiurile $NBM$ cu $PBM$ . Unghiurile $\sphericalangle NBM$ și $\sphericalangle PBM$ sunt drepte, cateta $MB$ este comună iar ipotenuzele $NM$ și $PM$ sunt congruente, deci din cazul IC rezultă congruența lor.	2p
	De aici avem că $NB = PB$ sau $CB = BB'$ sau lățimea este egală cu înălțimea paralelipipedului(**)	1p
	Din afirmațiile (*) și (**) deducem că paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ este cub	1p

Notă: Orice rezolvare corectă a unei probleme, diferită de cea din barem, se notează cu 7 puncte.