

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Locală, Satu Mare, 8 februarie 2025**  
**CLASA a VI-a**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Problema 1.**

Se consideră mulțimile  $A_1=\{1\}$ ,  $A_2=\{2, 3\}$ ,  $A_3=\{4, 5, 6\}$ , etc.

- Determinați elementul din mijloc al mulțimii  $A_{41}$ .
- Care este numărul minim de elemente ce trebuie șterse din mulțimea  $A_{41}$ , pentru ca suma elementelor rămase să fie un pătrat perfect? Justificați răspunsul.

item	Rezolvare	Punctaj
a)	Observăm că ultimul element al mulțimii $A_n$ este egal cu $1+2+3+\dots+n$ , deci ultimul element al mulțimii $A_{41}$ este egal cu $1+2+3+\dots+41=861$	1p
	Deoarece mulțimea $A_{41}$ are 41 de elemente $\Rightarrow A_{41}=\{821, 822, 823, \dots, 861\}$	1p
	Observăm că elementul din mijloc este $841=29^2$	1p
b)	Celelalte elemente ale mulțimii $A_{41}$ sunt de forma $29^2 \pm a$ , $1 \leq a \leq 20$ .	1p
	Suma elementelor mulțimii $A_{41}$ este egală cu $41 \cdot 29^2 = 34481$ .	1p
	Numărul minim de elemente care trebuie șterse din $A_{41}$ este 2, acestea fiind 859 și 861. Suma numerele șterse fiind 1720.	1p
	În acest caz suma elementelor rămase este $32761=181^2$ p.p.	1p

**Problema 2.**

- Fie  $x, y, z$  numere raționale pozitive, astfel încât  $\frac{x}{2} = \frac{y}{4}$  și  $\frac{y}{6} = \frac{z}{9}$ .

Arătați că numărul divizorilor produsului  $2025 \cdot x \cdot y \cdot z$  este pătrat perfect știind că  $x + y + z = 24$ .

- Fie  $a$  și  $b$  două numere naturale nenule,  $a < b$ , astfel încât  $[a, b] = 135$  și  $a \cdot b = 2025$ .  
Determinați numerele prime  $m$  și  $n$  care satisfac relația  $a \cdot m + b \cdot n = 1725$ .

item	Rezolvare	Punctaj
a)	$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = k \Rightarrow x = 2k, y = 4k$	1p
	$\frac{4k}{6} = \frac{z}{9} \Rightarrow z = \frac{36k}{6} = 6k$ $2k + 4k + 6k = 24 \Rightarrow 12k = 24 \Rightarrow k = 2$ $x = 4; y = 8; z = 12$	1p
	$2025 \cdot x \cdot y \cdot z = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^7 \cdot 3^1 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2$	1p
	$nr. div. = (7+1) \cdot (5+1) \cdot (2+1) = 144 = 12^2$ p.p.	1p

b)	$[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b \Rightarrow 135 \cdot (a, b) = 2025 \Rightarrow (a, b) = 15$ $a = 15x, \quad b = 15y, \quad (x, y) = 1$	1p
	$15x \cdot 15y = 2025 \Rightarrow x \cdot y = 9$ $a < b \Rightarrow x = 1, y = 9 \Rightarrow a = 15 \text{ și } b = 135$	1p
	$15 \cdot m + 135 \cdot n = 1725 \Rightarrow m + 9 \cdot n = 115,$ $m, n \text{ prime și } 1725 \text{ impar} \Rightarrow$ $I: m \text{ par și } (9 \cdot n) \text{ impar} \Rightarrow m = 2, n = \frac{113}{9} \notin N$ $II: (9 \cdot n) \text{ par și } m \text{ impar} \Rightarrow n = 2 \text{ și } m = 97$	1p

### Problema 3.

Pe cercul  $\odot(O, r)$  se consideră punctele distincte  $A_1, A_2, \dots, A_{25}$  în această ordine, pe arcu mare  $\widehat{A_1 A_{25}}$ . Dacă  $\widehat{A_n A_{n+1}} = \widehat{A_{n-1} A_n} + 1^\circ$ , unde  $n \in N, 1 < n < 25$  și măsura arcu mare  $\widehat{A_1 A_{25}} = 324^\circ$ .

a) Calculați măsura unghiului  $\angle A_1 O A_6$

b) Aflați măsura arcu mic  $\widehat{A_{24} A_3}$ .

item	Rezolvare	Punctaj
a)	$\widehat{A_1 A_{25}} = \widehat{A_1 A_2} + \widehat{A_2 A_3} + \dots + \widehat{A_{24} A_{25}}$	1p
	$\widehat{A_1 A_{25}} = 24\widehat{A_1 A_2} + (1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 23^\circ)$	1p
	$24\widehat{A_1 A_2} + 276^\circ = 324^\circ \Rightarrow 24\widehat{A_1 A_2} = 324^\circ - 276^\circ \Rightarrow \widehat{A_1 A_2} = 2^\circ.$	1p
	$\angle A_1 O A_6$ este un unghi la centru, deci $\angle A_1 O A_6 = \widehat{A_1 A_6} = 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + 5^\circ + 6^\circ = 20^\circ.$	1p
b)	$\widehat{A_{25} A_1} = 360^\circ - 324^\circ = 36^\circ$	1p
	$\widehat{A_{24} A_{25}} = \widehat{A_1 A_2} + 23^\circ = 25^\circ$	1p
	$\widehat{A_{24} A_3} = 25^\circ + 36^\circ + 2^\circ + 3^\circ = 66^\circ.$	1p

### Problema 4.

Fie unghiurile  $\angle A_1 O A_2, \angle A_2 O A_3, \angle A_3 O A_4, \dots, \angle A_8 O A_9$  care au interioarele disjuncte iar  $\angle A_1 O A_9$  este alungit. Dacă  $\angle A_1 O A_2 = p_1^\circ, \angle A_2 O A_3 = p_2^\circ, \dots, \angle A_8 O A_9 = p_8^\circ$ , unde  $p_1, p_2, \dots, p_8$  sunt numere prime distincte de două cifre și  $p_1 > p_8 > p_7 > p_2 > p_3 > p_6 > p_5 > p_4$  atunci arătați că:

- $OA_5 \perp OA_1$
- $OA_5$  este bisectoarea unghiului  $\angle A_3 O A_7$
- $\angle A_1 O A_3 = \angle A_3 O A_7 = \angle A_7 O A_9$

Supliment G.M. nr.11/2024

item	Rezolvare	Punctaj
------	-----------	---------

a)	$\sphericalangle A_1OA_9$ este alungit $\Rightarrow p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_8 = 180^\circ$	1p
	$11+13+17+19+23+29+31+37=180$	1p
	$p_1 > p_8 > p_7 > p_2 > p_3 > p_6 > p_5 > p_4 \Rightarrow p_1 = 37, p_2 = 23, p_3 = 19, p_4 = 11, p_5 = 13, p_6 = 17, p_7 = 29, p_8 = 31$	1p
	$\sphericalangle A_1OA_5 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 37 + 23 + 19 + 11 = 90^\circ \Rightarrow OA_5 \perp OA_1$	1p
b)	$\sphericalangle A_3OA_5 = p_3 + p_4 = 19 + 11 = 30^\circ$ $\sphericalangle A_5OA_7 = p_5 + p_6 = 13 + 17 = 30^\circ$	1p
	$\sphericalangle A_3OA_5 = \sphericalangle A_5OA_7 \Rightarrow (OA_5 \text{ este bis. unghiului } \sphericalangle A_3OA_7$	1p
c)	$A_1OA_3 = p_1 + p_2 = 37 + 23 = 60^\circ$ $\sphericalangle A_3OA_7 = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 19 + 11 + 13 + 17 = 60^\circ$ $\sphericalangle A_7OA_9 = p_7 + p_8 = 29 + 31 = 60^\circ$ $\Rightarrow \sphericalangle A_1OA_3 = \sphericalangle A_3OA_7 = \sphericalangle A_7OA_9$	1p

Notă: Orice rezolvare corectă a unei probleme, diferită de cea din barem, se notează cu 7 puncte.