

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Locală, Satu Mare, 8 februarie 2025**  
**CLASA a VII-a**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Problema 1.**

a) Aflați cel mai mic număr întreg care este mai mare decât  $x$ , unde

$$x = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{12} + \sqrt{16} + \sqrt{20} + \sqrt{24}}{2 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}.$$

b) Arătați că  $\sqrt{a}$  este număr rațional, unde,

$$a = \left( 2026 - \frac{1007}{\sqrt{1+3+5+\dots+2013}} \right)^{12} \cdot 2025.$$

item	Rezolvare	Punctaj
a)	$x = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}) + \sqrt{4} \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6})}{2 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}$	1p
	$x = \frac{(2 + \sqrt{5} + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2} + 2)}{2 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}$	1p
	$x = \sqrt{2} + 2$	1p
	$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 3 < \sqrt{2} + 2 < 4$	1p
	$\Rightarrow$ cel mai mic număr întreg, care este mai mare decât $x$ este 4.	
b)	$1 + 3 + 5 + \dots + 2013 = (1 + 2013) \cdot 1007 : 2 = 1007^2$	1p
	$a = (2026 - 1)^{12} \cdot 2025 = 2025^{13}$	1p
	$\sqrt{a} = \sqrt{(45^2)^{13}} = 45^{13} \in \mathbb{Q}.$	1p

**Problema 2.**

a) Fie mulțimea:  $A = \left\{ \frac{2024}{3}, \frac{2025}{4}, \frac{2026}{5}, \frac{2027}{6}, \dots \right\}$ . Determinați cardinalul mulțimii  $B = A \cap \mathbb{N}$ ,  
 $\mathbb{N}$  - mulțimea numerelor naturale.

b) Fie  $b = |2a - 4| + |a - 3| - a$ , unde  $a$  este număr real cu  $2 < a < 3$ .

Determinați partea întreagă a numărului real  $\frac{a}{b}$ .

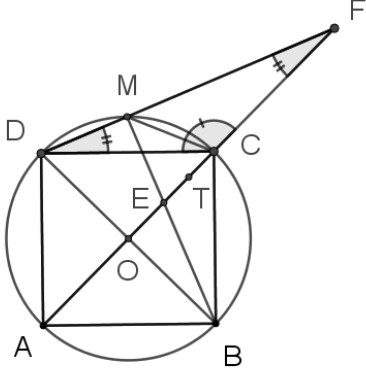
item	Rezolvare	Punctaj
a)	Elementele mulțimii $A$ au forma $\frac{2024+n}{3+n}$	1p
	$\frac{2024+n}{3+n} = \left( 1 + \frac{2021}{n+3} \right) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2021}{n+3} \in \mathbb{N}$	
	$\frac{2021}{n+3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n+3) \in \{1, 43, 47, 2021\}$	1p
	$n \in \{40, 44, 2018\}$ , deci card $B = 3$ .	1p
b)	$2 < a \Rightarrow a - 2 > 0 \Rightarrow  2(a - 2)  = 2(a - 2)$	1p
	$a < 3 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow  a - 3  = -a + 3$	1p

$b = 2a - 4 - a + 3 - a = -1$	1p
$-3 < -a < -2, \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{-1}\right] = [-a] = -3.$	1p

### Problema 3.

Fie pătratul ABCD, punctul F pe prelungirea lui AC dincolo de C astfel încât  $CF = AB$  și DF intersectează cercul circumscris pătratului în M. Fie E punctul de intersecție al dreptelor BM și AC.

- a) Demonstrați că (BM este bisectoarea unghiului  $\angle DBC$ ).  
b) Arătați că segmentele [AF] și [EC] au același mijloc.

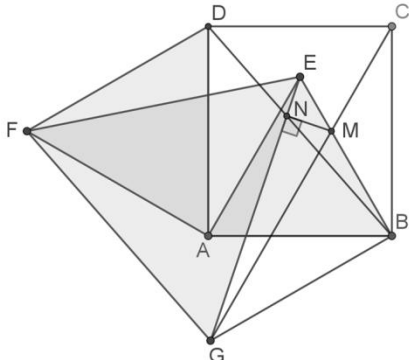
item	Rezolvare	Punctaj
a)	 <p><math>FC = AB = CD \Rightarrow \triangle CFD</math> isoscel  <math>\Rightarrow \angle CFD = \angle CDF = \frac{180^\circ - \angle FCD}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - 45^\circ)}{2} = 22^\circ 30'</math>  <math>\angle CDF = \angle CDM = 22^\circ 30' \Rightarrow \widehat{MC} = 45^\circ</math> și cum <math>\widehat{CD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MC} = \widehat{MD}</math>,  de unde <math>\angle CBM = \angle DBM \Rightarrow</math> (BM este bisectoarea unghiului <math>\angle DBC</math>).</p>	1p
b)	<p>Fie T mijlocul segmentului AF <math>\Rightarrow TA = TF</math>.  Notăm cu O centrul pătratului.  În <math>\triangle BOE</math>, dreptunghic în O, <math>\angle OEB = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'</math>  <math>\Rightarrow \angle AEB = 67^\circ 30'</math>; dar <math>\angle ABE = 45^\circ + 22^\circ 30' = 67^\circ 30'</math>,  prin urmare <math>\triangle ABE</math> este isoscel <math>\Rightarrow AE = AB</math>. Cum <math>AB = CF \Rightarrow AE = CF</math>  din <math>TA = TF</math> și <math>AE = CF</math> obținem <math>TE = TC</math>, deci T este mijlocul segmentului CE.</p>	1p
		1p
		1p

#### Problema 4.

Fie ABCD un dreptunghi cu  $30^\circ < \angle DBC < 45^\circ$ . Construim pe rând triunghiul echilateral ABE cu E în interiorul dreptunghiului, triunghiul echilateral ADF cu F și E de o parte și de alta a dreptei AD și triunghiul echilateral EFG cu G și E de o parte și de alta a dreptei AB. Notăm cu M intersecția dreptelor EB și CG, iar cu N intersecția dreptelor BD și EG. Arătați că:

a)  $AG = CE$

b)  $MN \perp GE$ .

item	Rezolvare	Punctaj
a)		
	$\angle EBC = \angle ABC - \angle ABE = 30^\circ$ . $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = 90^\circ$ . $\triangle FAE \begin{cases} [FA] \equiv [DA] \\ \angle FAE \equiv \angle DAB (= 90^\circ) \\ [AE] \equiv [AB] \end{cases} \xrightarrow{\text{L.U.L.}} \triangle FAE \equiv \triangle DAB$ , de unde rezultă $FE = DB$ de unde $GE = AC$ .	1p
	$\triangle FEA \begin{cases} [FE] \equiv [GE] \\ \angle FEA \equiv \angle GEB (= 60^\circ - \angle AEG) \\ [EA] \equiv [EB] \end{cases} \xrightarrow{\text{L.U.L.}} \triangle FEA \equiv \triangle GEB$ , de unde rezultă $FA = GB$ .	1p
	Deoarece $FA = GB$ , $BC = AD = AF$ rezultă $GB = BC$ , adică triunghiul BCG este isoscel cu $\angle CBG = \angle CBE + \angle EBG = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$	1p
	astfel $\angle BCG = \angle BGC = 30^\circ$ . $\angle DAE = \angle BCG = 30^\circ$ de unde rezultă $AE \parallel CG$ . Astfel, AECG este trapez și cum are diagonalele congruente ( $GE = AC$ ) $\Rightarrow$ AECG este trapez isoscel $\Rightarrow AG = CE$ .	1p
b)	$\triangle BED \equiv \triangle EAG$ (L. L. L.)	1p
	$\Rightarrow \angle EBD = \angle AEG = \angle EGC$ , sau $\angle MBN = \angle NGM$ . Astfel, patrulaterul BMNG este inscriptibil.	1p
	BMNG - inscriptibil $\Rightarrow \angle GNM + \angle GBM = 180^\circ$ , $\angle GBM = 90^\circ$ . de unde rezultă $\angle GNM = 90^\circ$ , adică $MN \perp GE$ .	1p

Notă: Orice rezolvare corectă a unei probleme, diferită de cea din barem, se notează cu 7 puncte.