

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 02.02.2025 –

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1

Folosind inducția matematică să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție:

Notăm $P(n): \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

I. Verificăm $P(1): \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \Leftrightarrow \frac{13}{12} > 1$ care este adevărată;

2p

II. Demonstrăm că implicația $P(k) \rightarrow P(k+1)$ este adevărată;

1p

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+4} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} >$$

2p

$$1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3k+3} = 1 + \frac{2}{(3k+2)(3k+4)(3k+3)} > 1$$

1p

Din I și II obținem $P(n)$ adevărată pentru orice n natural nenul.

1p

SUBIECTUL 2

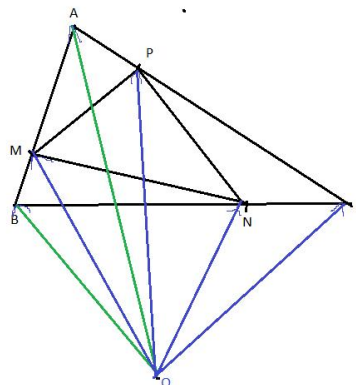
Pe laturile AB, BC, AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N și respectiv P, astfel

$$\text{încât } \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = 3.$$

3p a) Să se arate că pentru orice punct O din plan are loc relația : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

4p b) Să se demonstreze că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

Soluție:



a) Se știe că dacă $M \in AB$ și $\frac{AM}{MB} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{4} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ 3p

b) Triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ 2p

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} \Rightarrow$$
 1p

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \Rightarrow \text{triunghiurile } ABC \text{ și } MNP \text{ au același centru de greutate}$$
 1p

SUBIECTUL 3

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC , M mijlocul laturii BC , $\{E\} = BI \cap AC$ și D între B și C astfel încât $BD = 2DC$. Demonstrați că $IM \parallel ED$ dacă și numai dacă $AB + BC = 3AC$.

Profesor Claudiu Militaru, GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

Dacă $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, și notăm $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, avem $\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{p}$, $\forall O$ 1p

deci $\overrightarrow{IB} = \frac{a\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{CB}}{p}$ iar $\overrightarrow{IC} = \frac{a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{BC}}{p}$ și $\overrightarrow{IM} = \frac{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}{2} = \frac{1}{2p}(a\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{CB} + a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{BC}) =$ 2p

$$\frac{a+c-b}{2p}\vec{u} + \frac{a+b-c}{2p}\vec{v}.$$

BE bisectoare implică $\frac{AE}{EC} = \frac{c}{a}$ deci $\overrightarrow{AE} = \frac{c}{a+c}\vec{v}$ și $\overrightarrow{EC} = \frac{a}{a+c}\vec{v}$ iar $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} =$ 2p

$$\vec{u} - \frac{c}{a+c}\vec{v}.$$

Exprimăm și \overrightarrow{ED} funcție de \vec{u} și \vec{v} : $\overrightarrow{ED} = \frac{\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC}}{3} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\frac{2a-c}{a+c}\vec{v}.$

$$IM \parallel ED \Leftrightarrow \frac{\frac{a+c-b}{2p}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{a+b-c}{2p}}{\frac{12a-c}{3(a+c)}} \Leftrightarrow \frac{a+c-b}{a+b-c} = \frac{a+c}{2a-c} \Leftrightarrow$$
 2p

$$a + c = 3b.$$

SUBIECTUL 4

Fie $a, b, c > 0$ și $a + b + c = 45$. Arătați că: $\frac{9}{\sqrt{ab}} + \frac{36}{\sqrt{bc}} + \frac{1296}{\sqrt{ac}} \geq 45$

Profesor Gheorghe Crăciun

Soluție:

Vom utiliza inegalitatea Bergström

Dacă $s, t, u > 0$, avem:

$$\frac{x^2}{s} + \frac{y^2}{t} + \frac{z^2}{u} \geq \frac{(x+y+z)^2}{s+t+u} \text{ și inegalitatea } Mg \leq Ma$$

$$\frac{9}{\sqrt{ab}} + \frac{36}{\sqrt{bc}} + \frac{1296}{\sqrt{ac}} = \frac{3^2}{\sqrt{ab}} + \frac{6^2}{\sqrt{bc}} + \frac{36^2}{\sqrt{ac}} \geq \frac{(3+6+36)^2}{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}} \quad 3p$$

$$\text{Dar } \sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}, \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ și avem} \quad 2p$$

$$\frac{45^2}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}} \geq \frac{45^2}{\frac{a+b+b+c+a+c}{2}} = \frac{45^2}{45} = 45 \quad 2p$$

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.