

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 2.02.2025 –

Clasa a XII-a

### SUBIECTUL 1

Se consideră mulțimea  $M = (-\infty, 1)$ . Pentru fiecare pereche  $(x, y) \in M \times M$ , notăm  $x * y = \frac{4-xy}{5-x-y}$ .

**3p** a) Să se arate că  $x * y \in M, \forall x, y \in M$ .

**4p** b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă și asociativă, dar nu admite element neutru.

\*\*\*

*Soluție:*

$$a) x < 1, y < 1 \Rightarrow x + y < 2 \Rightarrow 5 - x - y > 3 \quad 1p$$

$$\frac{4-xy}{5-x-y} < 1 \Leftrightarrow 4-xy < 5-x-y \Rightarrow xy-x-y-1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0 \quad 2p$$

b) Legea „ $*$ ” este comutativă:

$$x * y = y * x, \forall x, y \in M \Leftrightarrow \frac{4-xy}{5-x-y} = \frac{4-yx}{5-y-x}, \forall x, y \in M \quad \text{adevărat din comutativitatea}$$

adunării și înmulțirii numerelor reale 1p

Legea „ $*$ ” este asociativă :

$$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$$

$$(x * y) * z = \left( \frac{4-xy}{5-x-y} \right) * z = \frac{20-4(x+y+z)+xyz}{21-5(x+y+z)+xy+xz+yz}$$

$$x * (y * z) = x * \left( \frac{4-yz}{5-y-z} \right) = \frac{20-4(x+y+z)+xyz}{21-5(x+y+z)+xy+xz+yz} \quad 2p$$

De unde rezultă  $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M \Rightarrow$  legea „ $*$ ” este asociativă

Element neutru

$$\exists e \in M \text{ astfel încât } x * e = e * x = x, \forall x \in M$$

$$x * e = e * x \text{ din comutativitatea legii „} * \text{”}$$

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{4-xe}{5-x-e} = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \text{legea „} * \text{” nu are element neutru.} \quad 1p$$

### SUBIECTUL 2

Se consideră

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin^{2025} x}{\pi + 2\sin^{2025} x + 2\cos^{2025} x} dx.$$

Demonstrați că  $I = \frac{\pi}{8}$ .

Profesor Claudiu Militaru

Soluție:

Fie  $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ ;  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$ ;  $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ . Integrala devine 1p

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\frac{\pi}{2} - t + \sin^{2025}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\pi + 2\sin^{2025}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\cos^{2025}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} (-dt) = 1p$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - t + \cos^{2025}t}{\pi + 2\cos^{2025}t + 2\sin^{2025}t} dt; 1p$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin^{2025}x}{\pi + 2\sin^{2025}x + 2\cos^{2025}x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x + \cos^{2025}x}{\pi + 2\cos^{2025}x + 2\sin^{2025}x} dx 2p$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} + \sin^{2025}x + \cos^{2025}x}{\pi + 2\sin^{2025}x + 2\cos^{2025}x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} 2p$$

### SUBIECTUL 3

Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ , cu  $0 \leq a < b$  și funcția

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + (a + b - x)^n}$$

3p a) Arătați că funcția  $f$  admite primitive.

4p b) Demonstrați că  $F\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right) - F(\sqrt{ab}) = \frac{a+b}{2} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ , pentru orice primitivă  $F$  a lui  $f$ .

Supliment GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$$a) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + (a + b - x)^n} = \begin{cases} a + b - x, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ x, & x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases} 2p$$

$f$  este continuă pe intervalul  $[a, b]$  deci admite primitive pe intervalul  $[a, b]$  1p

b) O primitivă a funcției  $f$  pe intervalul  $[a, b]$  este funcția 1p

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} (a + b)x - \frac{x^2}{2} + c_1, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \frac{x^2}{2} + c_2, & x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

Din condiția de continuitate a funcției  $F$  în punctul  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  se obține

1p

$$F(x) = \begin{cases} (a+b)x - \frac{x^2}{2} + c, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \frac{x^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} + c, & x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right) - F(\sqrt{ab}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} - (a+b)\sqrt{ab} + \frac{1}{2} \cdot ab = \\ &= \frac{(a+b)^2}{2} - (a+b)\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

2p

#### SUBIECTUL 4

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea  $x \circ y = [x+a] + [y+b]$ , unde  $a, b \in (0, 1)$ .  
Determinați submulțimile  $G$  ale lui  $\mathbb{R}$  pentru care  $(G, \circ)$  formează un grup abelian.

*Profesor Petre Năchilă*

*Soluție:*

$(G, \circ)$  formează un grup abelian deci există  $e \in G$  element neutru, deci pentru orice  $x$  avem  $x \circ e = e \circ x = x$ , așadar  $[x+a] + [e+b] = x$ , de unde orice  $x \in \mathbb{Z}$ .

3p

Legea de compoziție devine:  $x \circ y = [x+a] + [y+b] = x+y$ ; Grupul  $(G, \circ) = (G, +)$ ;

2p

Cum  $G \subseteq \mathbb{Z}$ , avem  $G = n\mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

2p

**Notă:** Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.