

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 2.02.2025 –

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1

Fie $a = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{4}) \dots (\sqrt{2025} - \sqrt{2024})$ și

$b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{4} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{4}) \dots (\sqrt{2025} + \sqrt{2024})$.

3p a) Calculați produsul numerelor a și b ;

4p b) Comparați numerele a și b .

Soluție:

$$a) a \cdot b = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{3})(\sqrt{4} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{4})(\sqrt{5} + \sqrt{4}) \dots (\sqrt{2025} - \sqrt{2024})(\sqrt{2025} + \sqrt{2024}) \quad 2p$$

$$= 1 \quad 1p$$

$$b) a = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{4}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}, \quad 2p$$

$$a < 1; \quad 1p$$

$$\text{cum } a \cdot b = 1, \text{ avem } a < 1 < b \quad 1p$$

SUBIECTUL 2

Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că :

$$\log_a^3 bc + \log_b^3 ac + \log_c^3 ab \geq 24$$

Soluție:

$$\log_a^3 bc + \log_b^3 ac + \log_c^3 ab \geq 3 \sqrt[3]{\log_a^3 bc \cdot \log_b^3 ac \cdot \log_c^3 ab} = 3 \log_a bc \cdot \log_b ac \cdot \log_c ab \quad 2p$$

$$= 3 \cdot \frac{\lg bc}{\lg a} \cdot \frac{\lg ac}{\lg b} \cdot \frac{\lg ab}{\lg c} = 3 \cdot \frac{\lg b + \lg c}{\lg a} \cdot \frac{\lg a + \lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg a + \lg b}{\lg c} \geq \quad 2p$$

$$\geq 3 \cdot \frac{2\sqrt{\lg b \cdot \lg c}}{\lg a} \cdot \frac{2\sqrt{\lg a \cdot \lg c}}{\lg b} \cdot \frac{2\sqrt{\lg a \cdot \lg b}}{\lg c} \quad 2p$$

$$= 24 \cdot \frac{\lg a \cdot \lg b \cdot \lg c}{\lg a \cdot \lg b \cdot \lg c} = 24 \quad 1p$$

SUBIECTUL 3

Fie $p, q \in \mathbb{R}^*$, $p \neq q$. Să se determine mulțimea

$$M = \left\{ A(z) \mid \operatorname{Re} \left(\frac{z-p}{z-q} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{z-p}{z-q} \right) \right\}, \text{ unde } z \in \mathbb{C}.$$

Soluție:

Punem condiția $z \neq q$.

$$\text{Fie } \omega = \frac{z-p}{z-q} = \frac{x+yi-p}{x+yi-q} = \frac{(x-p+yi)(x-q-yi)}{(x-q)^2+y^2} = \quad 1p$$

$$= \frac{(x-p)(x-q)+y^2+(p-q)yi}{(x-q)^2+y^2} = \frac{x^2-(p+q)x+pq+y^2+(p-q)yi}{(x-q)^2+y^2} \quad 2p$$

$$\operatorname{Re}(\omega) = \operatorname{Im}(\omega) \Leftrightarrow x^2 - (p+q)x + pq + y^2 = (p-q)y \quad 1p$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (p+q)x + pq + y^2 - (p-q)y = 0 \Leftrightarrow \quad 1p$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(p-q)^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Dacă } z = q \Rightarrow x = q \text{ și } y = 0 \text{ și înlocuind în (1) obținem } \left(q - \frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(p-q)^2}{2}, \text{ care este adevărat} \quad 1p$$

$$\text{Deci } A(z), z \neq q \text{ aparține cercului cu centrul în punctul } M_0 \left(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}\right) \text{ și de rază } 1p$$

$$r = \frac{|p-q|}{\sqrt{2}}, \text{ deoarece relația (1) este echivalentă cu } |AM_0|^2 = \frac{(p-q)^2}{2}$$

$$\text{În concluzie, } M = \left\{ A(z) \mid |AM_0| = \frac{|p-q|\sqrt{2}}{2}, \text{ unde } M_0 \left(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}\right) \right\} \setminus \{q\}$$

SUBIECTUL 4

Determinați funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea:

$$f(f(n+1)) = f(f(n)+1) = n+4049, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Supliment GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$$f \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(f(n)) = n+4048 \text{ este injectivă deci } f \text{ este injectivă; } \quad 2p$$

$f(f(n+1)) = f(f(n)+1)$ și f injectivă implică $f(n+1)=f(n)+1$; 1p

putem scrie $f(n) = f(n-1) + 1 = f(n-2) + 2 = f(n-3) + 3 = \dots = f(1) + n - 1 = n + f(1) - 1$; 1p

$f(f(n)+1) = f(n+f(1)) = n + f(1) + f(1) - 1 = n + 2f(1) - 1$, deci 1p

$n + 2f(1) - 1 = n + 4049$, așadar $f(1) = 2025$ 1p

și $f(n) = n + 2024$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.