

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ-2025**  
**Clasa a VII-a**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .

**SUBIECTUL 1**

Se consideră expresia:  $E = \left(\frac{5+3\sqrt{6}}{6}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}\right)^{2k+1}$ , cu  $k$  număr natural.

- a) Stabiliți semnul expresiei.  
b) Să se arate că  $|E| < 1$

**BAREM:**

a) $\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{6}\right)^{2k} > 0,$	1p
$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{3} < 0$	1p
Deci: $\left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}\right)^{2k+1} < 0$ . Așadar, $E < 0$	1p
b) $ E  = \left \left(\frac{5+3\sqrt{6}}{6}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}\right)^{2k+1}\right  = \left(\frac{5+3\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}\right)^{2k} \cdot \left \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}\right $	1p
$\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}\right)^{2k} = \left(\frac{3\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{18}\right)^{2k} = \left(\frac{8\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{18}\right)^{2k} < 1$	1p
$\left \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}\right  = \left \frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{3}\right  = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}}{3} < 1$	1p
Deci, $ E  < 1$	1p

**SUBIECTUL 2**

Fie  $S = \frac{1}{1 \cdot 18} + \frac{1}{2 \cdot 27} + \dots + \frac{1}{n(9n+9)}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Calculați  $S$ .  
b) Determinați  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $18S \in \mathbb{N}$ .  
c) Determinați  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\sqrt{S} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

**BAREM:**

a)	
$S = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$	1p
$S = \frac{1}{9} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{n}{n+1}$	2p
b) $18 \cdot \frac{n}{9(n+1)} = \frac{2n}{n+1} \in \mathbb{N}$	
$n+1 \mid 2n$ și $n+1 \mid 2(n+1) \Rightarrow n+1 \mid 2 \Rightarrow n+1 \in \{1, 2\}$	1p
$n \in \{0, 1\}$ dar $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n=1$	1p
c) $\sqrt{\frac{n}{9(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{n}{9(n+1)} = \frac{1}{10}$	1p
$10n = 9n + 9 \Rightarrow n = 9$	1p

**SUBIECTUL 3.**

Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc, în exteriorul  $\triangle ABC$ , triunghiurile echilaterale ABM și ACN. Să se arate că  $BN \equiv CM$ .

**BAREM:**

$[AM] = [AB], [AC] \equiv [AN]$	2p
$m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{BAC}) + 60^\circ$	2p
Rezultă că $\triangle AMC \equiv \triangle ABN$ (LUL)	2p
Deci, $[BN] \equiv [CM]$	1p

**SUBIECTUL 4.**

Fie triunghiul ABC cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 30^\circ$ . În exteriorul triunghiului construim triunghiurile isoscele ADC și AEB cu  $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AEB = 120^\circ$ . Știind că M este mijlocul laturii BC și F este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD, arătați că patrulaterul DABM este romb și  $EF \parallel BC$ .

*Gazeta matematica nr.11/2024*

**BAREM:**

AM mediană în $\Delta ABC \Rightarrow AM = BM = MC \Rightarrow \Delta MAC$ isoscel cu $\angle MAC = \angle MCA = 30^\circ$ și $\Delta ABM$ echilateral $\Rightarrow AB = BM = AM$	1p
$\Delta MAC \equiv \Delta DAC (ULU) \Rightarrow AD = DC = MC = AM$	1p
$\Delta MAD$ echilateral $\Rightarrow MD = AD$	1p
$AB = BM = MD = AD \Rightarrow DABM$ romb	1p
$DABM$ romb $\Rightarrow BD$ bisectoarea unghiului $\angle ABM \Rightarrow \angle ABD = \angle DBM = 30^\circ$	1p
FM mediana în $\Delta FBC$ isoscel $\Rightarrow FM \perp BC$ . Cum $\angle EBC = 90^\circ \Rightarrow FM \parallel EB(1)$	
Din $\Delta BFM \equiv \Delta BFA (CI) \Rightarrow AF \equiv FM \Rightarrow \Delta AFM$ isoscel	1p
Din $\Delta EAB \equiv \Delta FAM (ULU) \Rightarrow EB \equiv FM(2)$	
Din relațiile (1), (2) și $\angle BMF = 90^\circ \Rightarrow EFMB$ dreptunghi $\Rightarrow EF \parallel BC$ .	1p