

**Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”****Etapa Locală****Maramureș – 8 februarie 2025****Clasa a XI - a****Secțiunea H2****Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii**

1. Se consideră mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ .

- a) Dați trei exemple de matrice  $A$  din  $M$  pentru care  $\det(A) = 1$ .
- b) Demonstrați că dacă  $A, B \in M$ , atunci  $A \cdot B \in M$ .
- c) Demonstrați că există cel puțin 2025 matrice  $A$  în mulțimea  $M$ , cu  $\det(A) = 1$ .

2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

a) Un program de calculator funcționează astfel:

- la un click mărește cu 1 toate elementele de pe linia 1 a matricei  $A$  și notează matricea obținută cu  $A_1$ ;
- la următorul click mărește cu 1 toate elementele de pe linia 2 a matricei  $A_1$  și notează cu  $A_2$  matricea obținută;
- la al treilea click mărește cu 1 toate elementele de pe linia 3 a matricei  $A_2$  și notează cu  $A_3$  matricea obținută;
- la următorul click reia procedeul și mărește cu 1 toate elementele de pe linia 1 a matricei  $A_3$  și notează cu  $A_4$  matricea obținută, etc.

Calculați suma  $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{99}$ .

b) Dacă  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  și  $X \cdot A = A \cdot X$ , demonstrați că  $X \in M$ .

3. a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + 2x) = -2$ .

b) Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}$ ,  $a, b \in (0; +\infty)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Determinați parametrii reali  $a, b, c$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ .

4. Calculați

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \dots + \sin(2025x)}{x}$$

**Notă:**

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru – 3 ore