

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a XII- a

Barem de corectare și notare

1. Fie $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ o funcție continuă. Arătați că ecuația $3x-1 = \int_0^x f(t)dt$ are o soluție unică în intervalul $[0,1]$.

Soluție.

Considerăm funcția $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x f(t)dt - 3x + 1$

g este derivabilă și $g'(x) = f(x) - 3 < 0, \forall x \in [0,1]$, deci g este strict descrescătoare pe $[0,1]$
.....4p

g este continuă pe $[0,1]$, $g(0) = 1 > 0$ și $g(1) = \int_0^1 f(t)dt - 2 \leq \int_0^1 1dt - 2 = -1 < 0$.

Cum g are P.D. $\Rightarrow \exists x_0 \in (0,1)$ astfel încât $g(x_0) = 0$.

Acest x_0 este unic pentru că g este strict descrescătoare.
.....3p

2. Calculați: a) $\int \frac{x+3}{x(x+2)(x+4)(x+6)+a^2} dx$, unde $x > 0$ și $a \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{-4x+5}{e^{4x}-x+1} dx$, unde $x \geq 0$.

Soluție.

a) $I = \int \frac{x+3}{x(x+2)(x+4)(x+6)+a^2} dx = \int \frac{x+3}{(x^2+6x)(x^2+6x+8)+a^2} dx$

Cu schimbarea de variabilă $x^2+6x=t$, obținem $2(x+3)dx=dt$, deci integrala asociată este

$$I_t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t(t+8)+a^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+4)^2 + a^2 - 16} dt$$

Dacă $a \in \{-4, 4\}$, $I_t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+4)^2} dt = -\frac{1}{2(t+4)} + C$.

Dacă $a \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$, $I_t = \frac{1}{2\sqrt{a^2-16}} \cdot \arctg \frac{t+4}{\sqrt{a^2-16}} + C$.

Dacă $a \in (-4, 4)$, $I_t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+4)^2 - \sqrt{16-a^2}} dt = \frac{1}{4\sqrt{16-a^2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{16-a^2}}{t+\sqrt{16-a^2}} \right| + C$.

Înlocuind $t = x^2 + 6x$, se obține I .
.....4p

b) $e^t \geq t+1, \forall t \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $t=0$,
 $\Rightarrow e^{4x} - x + 1 \geq 4x + 1 - x + 1 = 3x + 2 > 0, \forall x \geq 0$. (1)

Căutăm $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$-4x + 5 = a(e^{4x} - x + 1)' + b(e^{4x} - x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -4x + 5 = a(4e^{4x} - 1) + b(e^{4x} - x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 5 = (4a + b)e^{4x} - bx + b - a, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4a + b = 0, b = 4 \text{ și } b - a = 5 \Leftrightarrow b = 4, a = -1.$$

$$\int \frac{-4x + 5}{e^{4x} - x + 1} dx = \int \frac{4(e^{4x} - x + 1) - (e^{4x} - x + 1)'}{e^{4x} - x + 1} dx = \int \left(4 - \frac{(e^{4x} - x + 1)'}{e^{4x} - x + 1} \right) dx =$$

$$= 4x - \ln|e^{4x} - x + 1| + C = 4x - \ln(e^{4x} - x + 1) + C \text{ (utilizând (1))} \dots\dots\dots 3p$$

3. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că, dacă $A, B \in M$ atunci $A \cdot B \in M$.

b) Demonstrați că (M, \cdot) este grup infinit în raport cu operația „ \cdot ” de înmulțire a matricelor.

Soluție.

a) Dacă $A, B \in M$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ și $\det A = \det B = 1$,
 atunci $AB = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + 3b_1 b_2 & 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & 3b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix}$,
 cu $x = a_1 a_2 + 3b_1 b_2 \in \mathbb{Z}, y = a_1 b_2 + a_2 b_1 \in \mathbb{Z}$,
 $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 1$ și deci $A \cdot B \in M$2p

b) $M \subset M_2(\mathbb{R})$ și „ \cdot ” e asociativă pe $M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ „ \cdot ” e asociativă pe M .

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ este element neutru. Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$, există
 matricea $A' = A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$ care verifică $A \cdot A' = A' \cdot A = I_2$,
 deci (M, \cdot) este grup.3p

Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M$ și avem $\{A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots\} \subset M$

Deoarece $A^n = \begin{pmatrix} x_n & 3y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$, iar șirurile de numere naturale $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ sunt
 strict crescătoare $\Rightarrow \{A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots\}$ este infinită,
 deci mulțimea M este infinită.2p

4. Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e . Dacă G are cel puțin 3 elemente, arătați că există $a, b \in G \setminus \{e\}, a \neq b$, astfel încât $a \cdot b = b \cdot a$.

Supliment Gazeta Matematică nr.9/2024

Soluție.

Dacă grupul G are un element x de ordin cel puțin 3, atunci $x \neq e, x^2 \neq e, x^2 \neq x$, deci

putem considera $a = x, b = x^2$ și avem $x^3 = a \cdot b = b \cdot a$**3p**

În caz contrar, orice element din $G \setminus \{e\}$ are ordinul 2, deci $x^2 = e, \forall x \in G$.

$$\forall u, v \in G \Rightarrow u^2 = e, v^2 = e \Rightarrow u = u^{-1}, v = v^{-1} \Rightarrow uv = u^{-1}v^{-1} = (vu)^{-1} = vu,$$

deci (G, \cdot) este comutativ (1) **2p**

Deoarece $\text{card}(G) \geq 3, \exists a, b \in G \setminus \{e\}, a \neq b$, iar din (1) avem că $a \cdot b = b \cdot a$ **2p**