

**Olimpiada de Matematică – Etapa Locală**  
**Maramureș – 8 februarie 2025**  
**Clasa a IX - a**

1. Se consideră numărul real  $a \in (0, +\infty)$  astfel încât  $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$ .

a) Dați un exemplu de un număr real pozitiv  $a$  care verifică egalitatea din ipoteză.

b) Calculați  $a^5 + \frac{1}{a^5}$ .

2. a) Arătați că  $x^3 - 3x + 2 \geq 0$  oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ . Precizați cazul în care se obține egalitate.

b) Fie  $a, b, c \in (0, +\infty)$ . Arătați că

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} - 2 \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația

$$\left[ \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{6} \right] = x - 2.$$

(prin  $[a]$  înțelegem partea întreagă a numărului real  $a$ ).

4. Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul  $H$  și centrul cercului circumscris  $O$ . Se notează cu  $X, Y, Z$  centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor  $HBC$ ,  $HAC$ , respectiv  $HAB$ .

a) Arătați că patrulaterul  $BOCX$  este paralelogram;

b) Arătați că  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ}$ .

**Notă :**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.*

*Timp de lucru - 3 ore*