

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a XI - a

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ și $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu $|z| = 1$. Dacă $\det(A - zI_2) = 0$, arătați că $\det A = 1$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și determinantul $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$. Arătați că numărul d are cel puțin trei divizori naturali.

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termeni pozitivi, definit prin $x_1 = 0$ și $x_n = 2x_{n+1}^2 - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $x_n = \cos \frac{\pi}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} (x_n - 1)$.

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b > 0$.

Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru - 3 ore