

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a XII - a

1. Fie $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ o funcție continuă. Arătați că ecuația $3x-1 = \int_0^x f(t)dt$ are o soluție unică în intervalul $[0,1]$.

2. Calculați:

a) $\int \frac{x+3}{x(x+2)(x+4)(x+6)+a^2} dx$, unde $x > 0$ și $a \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{-4x+5}{e^{4x}-x+1} dx$, unde $x \geq 0$.

3. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

b) Demonstrați că (M, \cdot) este un grup infinit în raport cu operația „ \cdot ” de înmulțire a matricelor.

4. Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e . Dacă G are cel puțin trei elemente, arătați că există $a, b \in G \setminus \{e\}$, $a \neq b$, astfel încât $a \cdot b = b \cdot a$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru - 3 ore