

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a XI - a

Barem de corectare și notare

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ și $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu $|z| = 1$. Dacă $\det(A - zI_2) = 0$, arătați că $\det A = 1$.

Soluție:

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A - zI_2) = z^2 - z(a + d) + \det A = f(z)$2p

Cum $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $f(z) = 0 \Rightarrow f(\bar{z}) = 0$ și $z \neq \bar{z}$ 2p

Deci z și \bar{z} sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$ și din a doua relație a lui Viete rezultă că

$z \cdot \bar{z} = \det(A) \Rightarrow \det(A) = |z|^2 = 1$ 3p

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și determinantul $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$. Arătați că numărul d are cel puțin trei

divizori naturali.

Soluție: $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \stackrel{C_2: C_2 - C_1, C_3: C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b - a & c - a \\ a^3 & b^3 - a^3 & c^3 - a^3 \end{vmatrix}$

$= (b - a)(c - a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2 + ba + a^2 & c^2 + ca + a^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c^2 + ca - b^2 - ba)$

$= (b - a)(c - a)(c - b)(a + b + c)$ 4p

Permutând numerele a, b și c numărul d rămâne același sau își schimbă semnul, deci numărul de divizori naturali rămâne neschimbat. De aceea putem presupune, fără a reduce generalitatea că $a \leq b \leq c$.

I. Dacă $a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$ sau $a + b + c = 0$, atunci $d = 0$, deci are o infinitate de divizori naturali.1p

II. Dacă $a \neq b \neq c \neq a$ și $a + b + c \neq 0$, atunci $a < b < c \Rightarrow c - a \geq 2$, deci numărul $c - a$ are cel puțin doi divizori naturali: pe 1 și pe $c - a$.

Presupunem că numărul d are exact doi divizori naturali, atunci $(b - a)(c - b)(a + b + c) = \pm 1$ și $c - a$ este număr prim.

Dar $b - a > 0, c - b > 0 \Rightarrow b - a = c - b = 1$ și $a + b + c = \pm 1$.

$b - a = 1 \Rightarrow b = a + 1$

$c - b = 1 \Rightarrow c = b + 1 = a + 2$

$a + b + c = \pm 1 \Leftrightarrow a + a + 1 + a + 2 = \pm 1 \Leftrightarrow 3a + 3 = \pm 1 (F)$.

Deci presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow d$ are cel puțin trei divizori naturali.2p

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ având termeni pozitivi, definit prin $x_1 = 0$ și $x_n = 2x_{n+1}^2 - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $x_n = \cos \frac{\pi}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} (x_n - 1)$.

Soluție.

a) Avem $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1 = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$,1p

Presupunem că $x_k = \cos \frac{\pi}{2^k}$ și dem că $x_{k+1} = \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Dar $x_{k+1} = \sqrt{\frac{1+x_k}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{2^k}}{2}} = \sqrt{\frac{1+2\cos^2 \frac{\pi}{2^{k+1}} - 1}{2}} = \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$ 4p

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} (x_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\cos \frac{\pi}{2^n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+1}} - 1 \right)$
 $= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{2^{2n+2}} = -\frac{\pi^2}{2}$ 2p

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b > 0$.

Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2}$.

G.M. 9/2024

Soluție: Prin inducție se demonstrează că $x_n > 0, \forall n \geq 1$.

Deoarece $x_{n+1} - x_n = a + \sqrt{b^2 + 4ax_n} > 0, \forall n \geq 0$ rezultă că șirul este strict crescător2p

Presupunem că șirul este mărginit superior, atunci el este convergent $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$

Trecând la limită în relația de recurență se obține că

$\ell = \ell + a + \sqrt{b^2 + 4a\ell} \Leftrightarrow 0 = a + \sqrt{b^2 + 4a\ell}$ (F), deci presupunerea făcută e falsă, deci șirul este nemărginit superior și fiind strict crescător $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 2p

Calculăm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} \stackrel{LSC}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}}{\sqrt{x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}} + \sqrt{x_n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n} \left(\frac{a}{\sqrt{x_n}} + \sqrt{\frac{b^2}{x_n} + 4a} \right)}{\sqrt{x_n} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{\sqrt{x_n}}} + \sqrt{\frac{b^2}{x_n^2} + \frac{4a}{x_n}} + 1 \right)} = \frac{2\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}$ 2p

Deoarece șirul $\left(\frac{x_n}{n^2} \right)_{n \geq 1}$ este cu termeni pozitiv și $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} = \sqrt{a}$,

va exista și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = a$ 1p