

Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapă locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a IX-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

a) Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $|ax - b| \leq c$, $|bx - c| \leq a$, $|cx - a| \leq b$. Demonstrați că $0 \leq x \leq 2$.

Supliment Gazeta Matematică

b) Ordonăți crescător numerele $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; $\frac{1}{4n}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a)	$ ax - b \leq c \Leftrightarrow -c \leq ax - b \leq c$ $ bx - c \leq a \Leftrightarrow -a \leq bx - c \leq a$ $ cx - a \leq b \Leftrightarrow -b \leq cx - a \leq b$	1p
	Se adună inegalitățile precedente $-(a+b+c) \leq (a+b+c)x - (a+b+c) \leq (a+b+c)$ și la împărțirea prin numărul pozitiv.....	1p
	$a+b+c$ se obține $-1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$	1p
b)	Demonstrează $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{4n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	2p
	Demonstrează $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$	1p
	Ordinea crescătoare $\frac{1}{4n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$	1p

Problema 2.

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 2,5 \\ y + [z] + \{x\} = 8,2, \text{ unde } [t] \text{ este partea întreagă a numărului real } t, \text{ iar } \{p\} \text{ este} \\ z + [x] + \{y\} = 1,3 \end{cases}$$

partea fracționară a numărului real p .

a) Arătați că $x + y + z = 6$.

b) Rezolvați sistemul.

Soluție:

a)	Prin adunare se obține $x + y + z + ([x] + \{x\}) + ([y] + \{y\}) + ([z] + \{z\}) = 12$, adică $2(x + y + z) = 12$, rezultă $x + y + z = 6$	2p
b)	Prin scăderea relațiilor $x + y + z = 6$, $x + [y] + \{z\} = 2,5$ se obține $\{y\} + [z] = 3,5$. Deoarece $[\{y\} + [z]] = [3,5]$ rezultă $[z] = 3$, deci $\{y\} = 0,5$	2p
	Prin scăderea relațiilor $x + y + z = 6$, $y + [z] + \{x\} = 8,2$ se obține $\{z\} + [x] = -2,2$. De aici $[\{z\} + [x]] = [-2,2]$, deci $[x] = -3$, iar $\{z\} = 0,8$	1p
	Prin scăderea relațiilor $x + y + z = 6$, $z + [x] + \{y\} = 1,3$ se obține $\{x\} + [y] = 4,7$. De aici $[\{x\} + [y]] = [4,7]$ avem $[y] = 4$, rezultă $\{x\} = 0,7$	1p
	Se obțin: $x = -3 + 0,7 = -2,3$; $y = 4 + 0,5 = 4,5$; $z = 3 + 0,8 = 3,8$	1p

Problema 3.

a) Se consideră numerele reale pozitive a și b . Arătați că $\frac{a}{1+4b^2} \geq a - ab$.

b) Arătați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c cu suma $a+b+c=\frac{3}{2}$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{1+4b^2} + \frac{b}{1+4c^2} + \frac{c}{1+4a^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Soluție:

a) $\frac{a}{1+4b^2} = \frac{a+4ab^2-4ab^2}{1+4b^2} = a - \frac{4ab^2}{1+4b^2}$	2p
Deoarece $1+4b^2 \geq 4b > 0$, avem $\frac{1}{1+4b^2} \leq \frac{1}{4b}$, deci $-\frac{4ab^2}{1+4b^2} \geq -\frac{4ab^2}{4b} = -ab$, rezultă $\frac{a}{1+4b^2} \geq a - ab$	1p
b) Adunând $\frac{a}{1+4b^2} \geq a - ab$ și analoagele $\frac{b}{1+4c^2} \geq b - bc$ și $\frac{c}{1+4a^2} \geq c - ca$ se obține $\frac{a}{1+4b^2} + \frac{b}{1+4c^2} + \frac{c}{1+4a^2} \geq a+b+c - (ab+bc+ca)$ (1).....	1p
Din $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ avem $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, deci $-(ab+bc+ca) \geq -\frac{(a+b+c)^2}{3}$ (2).....	2p
Din (1) și (2) se obține $\frac{a}{1+4b^2} + \frac{b}{1+4c^2} + \frac{c}{1+4a^2} \geq a+b+c - \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$	1p

Problema 4.

Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Fie H și H_1 ortocentrele triunghiurilor ABD , respectiv ABC și G, G_1 centrele de greutate ale triunghiurilor HAD , respectiv H_1BC .

a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GG_1}$ în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{DC} .

b) Dacă $AB \neq CD$ și $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$, arătați că patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel.

Soluție:

a) Dacă O este centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$, avem următoarele relații $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$	1p
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})$	1p
$\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$	2p
b) $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} \leq AB + 2CD$	1p
Are loc egalitatea dacă și numai dacă vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{DC} sunt coliniari, cum $AB \neq CD$, $ABCD$ este trapez.....	1p
$ABCD$ este inscriptibil, deci $ABCD$ este trapez isoscel.....	1p

