



Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapă locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a XII-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Problema 1.

Se consideră mulțimea $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\}$.

Arătați că (A, \circ) este un monoid, unde „ \circ ” este operația de compunere a funcțiilor.

Soluție:

Pentru $f, g \in A$ avem $(f \circ g)(x+y) = f(g(x+y)) = f(g(x) + g(y)) = (f \circ g)(x) + (f \circ g)(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, deci $f \circ g \in A$, ceea ce arată că „ \circ ” este lege de compoziție pe mulțimea A 3p

Compunerea funcțiilor este asociativă, iar elementul neutru al acestei operații, funcția identică $1_{\mathbb{R}}$, aparține mulțimii A . Rezultă că (A, \circ) este un monoid 4p

Problema 2.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$. Demonstrați că $2 \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq 3$.

Soluția 1:

$\sqrt{3x^2 + 1} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, așadar $\int_{-1}^1 f(x) dx \geq \int_{-1}^1 1 dx = 2$ 2p

$\sqrt{3x^2 + 1} \leq |x| + 1, \forall x \in [-1, 1]$ (inegalitatea revine la $x^2 \leq |x|, \forall x \in [-1, 1]$, evident adevărat), prin urmare $\int_{-1}^1 f(x) dx \leq \int_{-1}^1 (|x| + 1) dx = 3$ 5p

Soluția 2:

Considerăm punctele $O(0,0), A(-1,0), B(1,0), C(-1,1), D(0,1), E(1,1), F(-1,2), G(1,2)$.

Restricția funcției f la intervalul $[-1, 1]$ este convexă pe $[-1, 1]$, strict descrescătoare pe $[-1, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, 1]$. Rezultă că $\mathcal{A}[ABEC] \leq \mathcal{A}(\Gamma_f) \leq \mathcal{A}[AODF] + \mathcal{A}[OBGD]$ 5p

Cum $\mathcal{A}[ABEC] = 2$, $\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$ și $\mathcal{A}[AODF] + \mathcal{A}[OBGD] = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, rezultă cerința problemei 2p

Problema 3.

Determinați funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că admite primitive,

$f(x) + F(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$, pentru o anumite primitivă F a funcției f , iar $f(0) = 0$.



Soluție:

Înmulțind cu e^x relația $f(x) + F(x) = \sin x$, obținem $(e^x \cdot F(x))' = e^x \cdot \sin x$ 2p

Deducem că $e^x \cdot F(x) = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + k, \forall x \in \mathbb{R}$, 2p

Atunci $F(x) = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + k \cdot e^{-x}$ și, prin derivare, $f(x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) - k \cdot e^{-x}$ 1p

Din $f(0) = 0$ obținem $k = \frac{1}{2}$, deci funcția căutată este $f(x) = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x - e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$, care verifică toate ipotezele problemei 2p

Problema 4.

Fie (G, \cdot) un grup finit cu elementul neutru e . Arătați că mulțimea

$$H = \{x \in G \mid x^{2025} = e\} \text{ are un număr impar de elemente.}$$

Soluție:

Observăm că $e \in H$ și, în cazul în care $H = \{e\}$, cerința este îndeplinită 1p

Dacă $H \neq \{e\}$, atunci există $a \in G \setminus \{e\}$ cu proprietatea că $a^{2025} = e$. Ordinul elementului a va fi un divizor (diferit de 1) al lui 2025, prin urmare ordinul elementului a este diferit de 1 și de 2. Deducem că $a \neq a'$, unde a' este simetricul lui a 4p

Putem grupa atunci toate elementele diferite de e ale mulțimii finite H în perechi de forma $\{a, a'\}$.

Rezultă că H are un număr impar de elemente 2p